Cônicas

Leiam o Resumo de Cônicas, escrito pela Profa. Ana Paula que está no e-disciplinas.

Na página 44 desse resumo está:

Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ satisfazem a equação

$$\boxed{\begin{array}{c} Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ \text{onde } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 . \end{array}} \quad (*)$$

Ou seja

$$\text{Cônica} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \}$$
$$\text{onde } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

As cônicas apresentadas aqui:

Elipse

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ está na FORMA REDUZIDA.

Hipérbole

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ou $\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$

FORMA REDUZIDA

Parábola

$\boxed{y^2 = 2px}$ ou $\boxed{x^2 = 2py}$

$p \neq 0$

FORMA REDUZIDA

O objetivo aqui é usar Álgebra Linear para determinar uma mudança de coordenadas para transformar a equação (*) em uma equação reduzida e aí conseguir identificar a cônica que ela representa.

Repare que se temos a equação reduzida de uma elipse ou de uma hipérbole, podemos usar os recursos de Cálculo para desenhar essas cônicas.

Exemplo 1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (Suponha $a>0$ e $b>0$)

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right) \iff y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ ,\ \text{se}\ -a \le x \le a$$

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Domínio de f: $[-a, a]$

A função f é derivável no intervalo aberto $]-a, a[$

e $f'(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2} \cdot -2x\right) = \frac{b}{a}\cdot\frac{(-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

O sinal da derivada f' no intervalo $]-a, a[$ é

	$-a$		0		a
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	

$$f''(x) = \frac{b}{a}\left[\frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot(-1) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(-\cancel{2}x)}{a^2-x^2}\right] = \frac{b}{a}\cdot\frac{(-a^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}} < 0$$

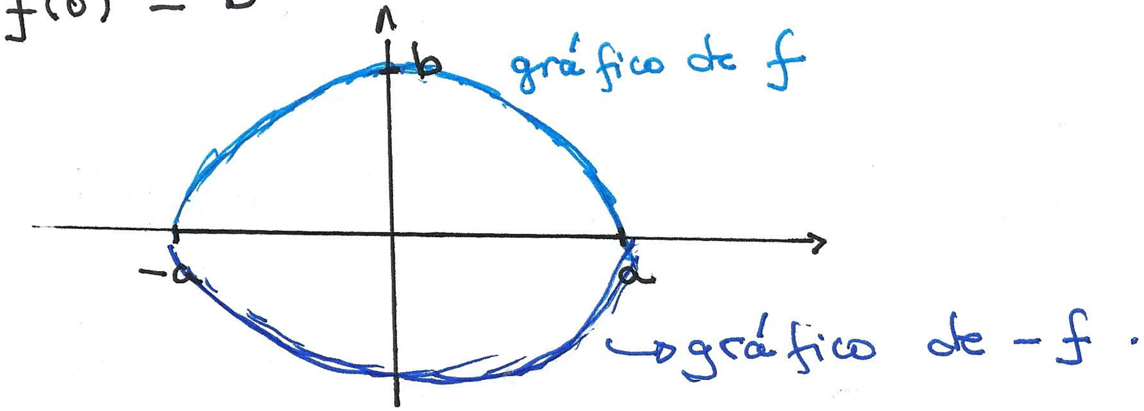
Concavidade de f:

	$-a$		0		a
f''		$-$		$-$	
f		$\frown$		$\frown$	

0 = pto de máximo de f

$f(a) = f(-a) = 0$

$f(0) = b$



Exemplo 2

Pode ser feito o análogo para desenhar as hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad e \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

O que é importante para desenhar a hipérbole é determinar suas assíntotas.

Se a hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ então } \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$(a>0, b>0)$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

assíntota se $x \to -\infty$

Se $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ então

domínio de f: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a$ ou $x \leq -a\}$

Lembre-se de que a reta

$y = mx + p$ é uma assíntota para f

$$\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = p.$$

(o mesmo para $-\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\sqrt{1-\underbrace{\frac{a^2}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{b}{a}$$

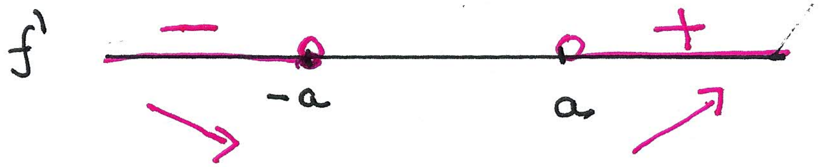
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

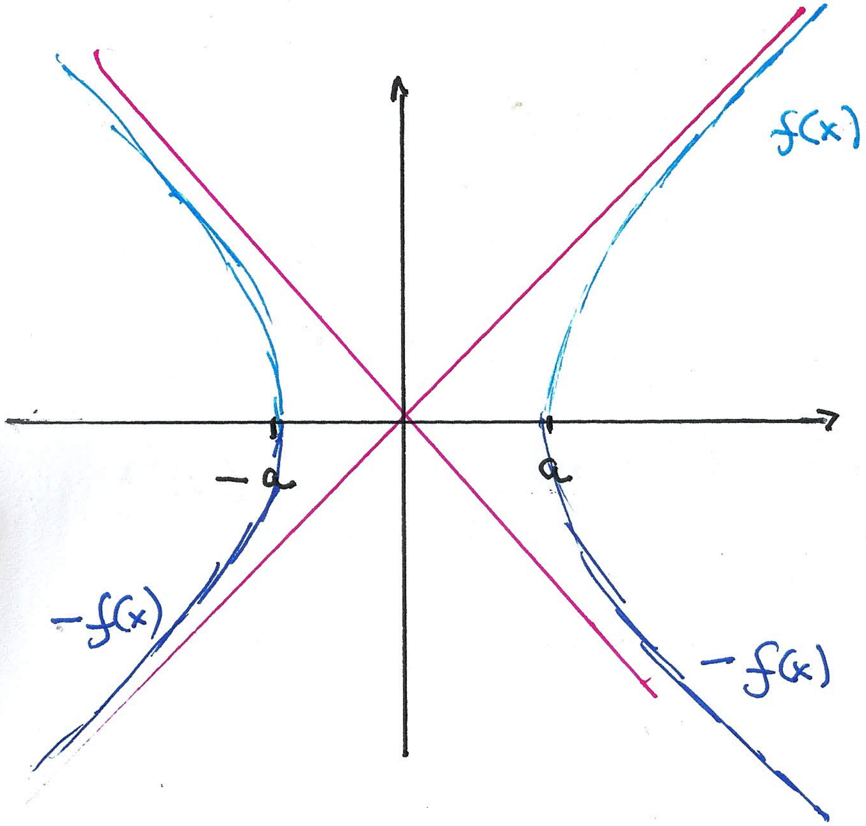
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x} = 0$$

Assim $y = \frac{b}{a}x$ é uma assíntota se $x \to +\infty$

Prove que $y = -\frac{b}{a}x$ é uma assíntota se $x \to -\infty$

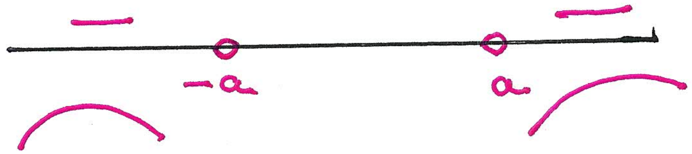
$$f'(x) = \frac{b}{\cancel{a}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} (x^2-a^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x$$





$$f''(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2} - \cancel{x}x\frac{1}{\cancel{2}}\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{-1/2}}{x^2-a^2}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{-a^2}{(x^2-a^2)^{3/2}}\right)$$



Para a hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2\frac{a^2 + x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$$

Analise $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ domínio de $f = \mathbb{R}$

Assíntotas $y = \dfrac{b}{a}x$, para $x \to +\infty$

$y = -\dfrac{b}{a}x$, para $x \to -\infty$

$$f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(a^2+x^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

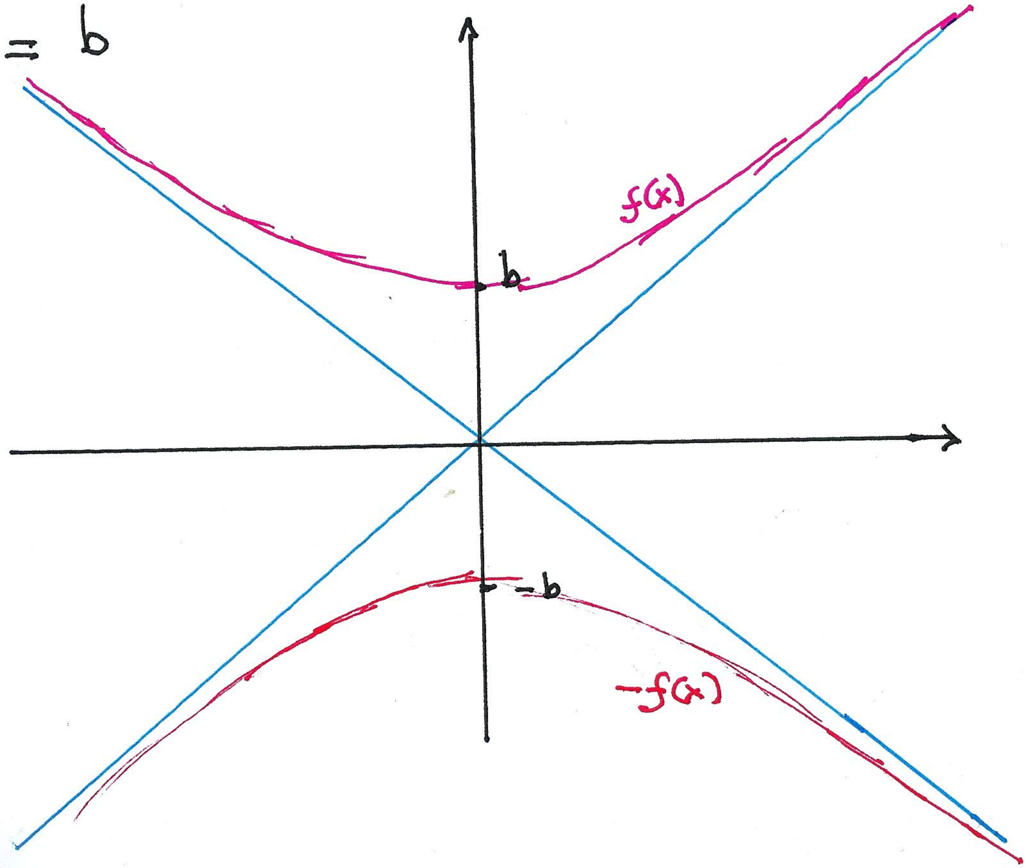
f' $- \; - \; - \; \underset{0}{\cdot} \; + \; + \; + \; +$

0 = pto de mínimo de f

$$f''(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2} - x\dfrac{1}{\cancel{2}}(a^2+x^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x}{a^2+x^2} = \frac{a^2 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

f'' $+ \; + \; + \; \cdot \; + \; + \; + \; +$

$f(0) = b$



Lembrar agora como desenhamos a parábola

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$$

Complete os quadrados

$$y = a\left(\left(x - \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(\quad \frac{\quad}{2a}\right) \quad \frac{\quad}{4a^2}\right)$$

Agora é só usar como é o gráfico de

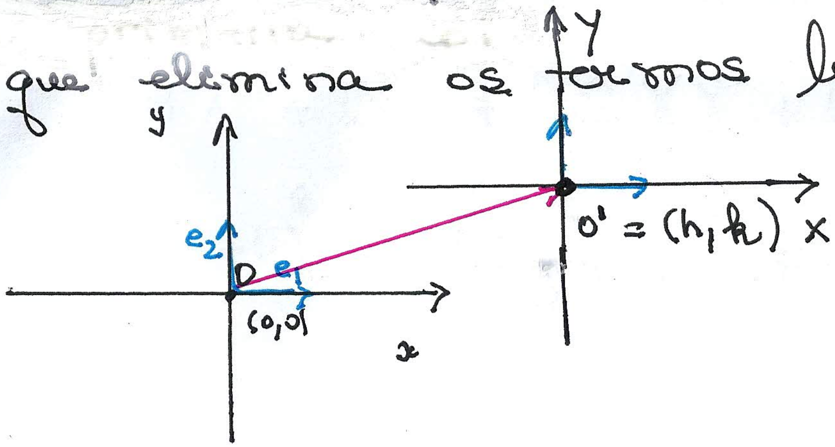
$$g(x) = k\left[f(x+p) + q\right]$$ em relação ao gráfico de $f(x)$.

Se você sabe isso e sabe fazer o gráfico de $f(x) = x^2$, então acabou!

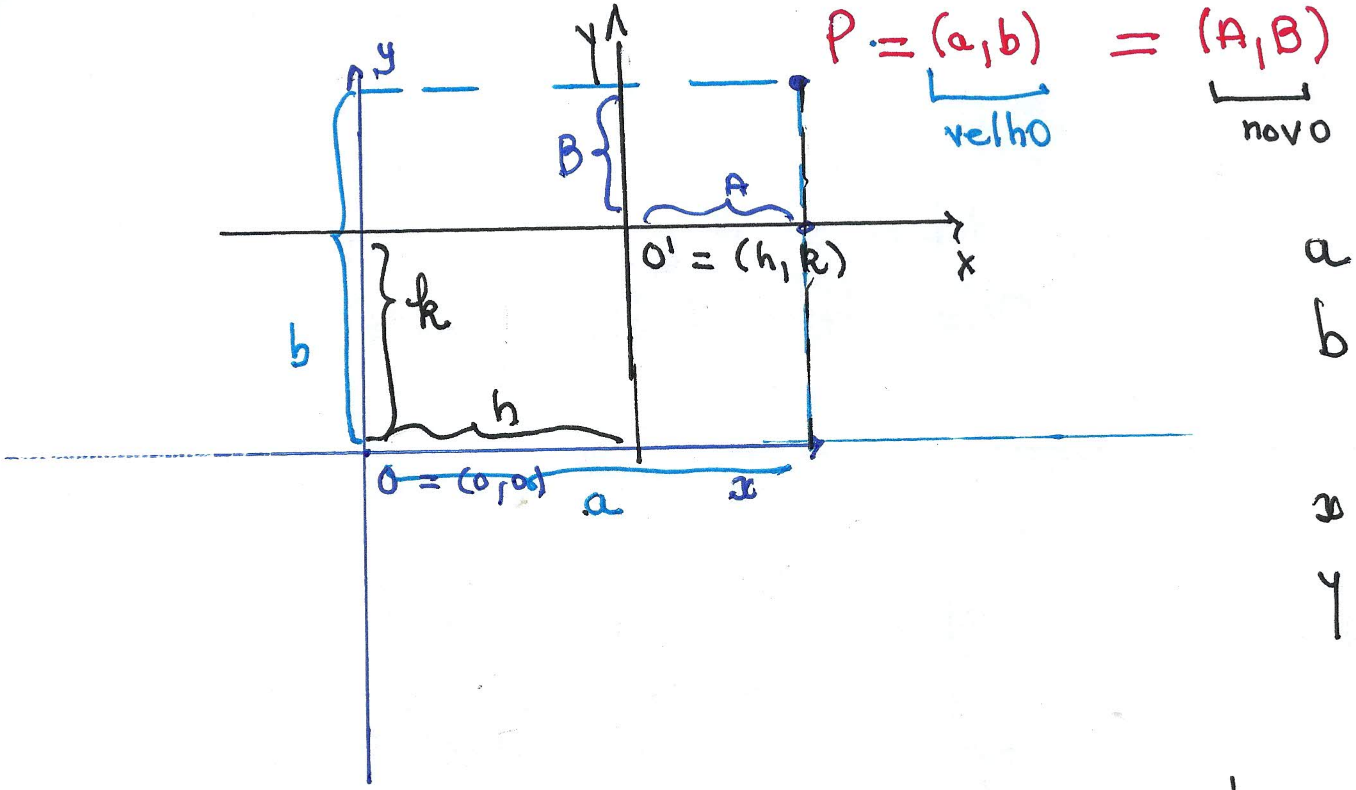
Quando temos uma equação

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \ (*)$$

procuramos primeiro ver se existe uma translação que elimina os termos lineares da equação.



$$\vec{OO'} = he_1 + ke_2$$



$$a = A + h$$
$$b = B + k$$

$$x = X + h$$
$$y = Y + k$$

Na equação (*) substitua $x = X + h$
$y = Y + k$

Queremos ver se existem h e k tais que a equação (*) se transforme em

$$A'X^2 + B'Y^2 + 2C'XY + F' = 0$$

$$A(x+h)^2 + B(y+k)^2 + 2C(x+h)(y+k) + 2D(x+h)$$
$$+ 2E(y+k) + F = 0$$

$$\Longleftrightarrow Ax^2 + \underline{2Axh} + Ah^2 + By^2 + 2Byk + Bk^2 + 2Cxy$$
$$+ \underline{2Cxk} + \underline{2Cyh} + 2Chk + 2Dx + 2Dh$$
$$+ 2Ey + 2Ek + F = 0$$

Queremos então h e k tais que

$$\begin{array}{l} 2Ah + 2Ck = 2D \\ 2Ch + 2Bk = 2E \end{array} \Longleftrightarrow \left.\begin{cases} Ah + Ck = D \\ Ch + Bk = E \end{cases}\right\} (S)$$

Com certeza se $\det\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \neq 0$, podemos achar h, k (únicos) tais que a eq $(*)$ fica

$$AX^2 + BY^2 + 2CXY + F' = 0$$

onde $F' = Ah^2 + Bk^2 + 2Chk + 2Dh + 2Ek + F$.

Se $\det\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} = 0$, o sistema (S) é incompatível ou tem infinitas soluções ...

Através de uma rotação de eixos podemos sempre eliminar o termo xy da equação (*)

Escreva $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ como

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Ax^2 + By^2 + 2Cxy$$

A matriz $\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$ é simétrica e então, ela é diagonalizável:

No caso $A = B$ e $C = 0$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $A \neq B$ ou $C \neq 0$ ela tem 2 autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ com autovetores v_1, v_2 com $v_1 \perp v_2$.

Tomando $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ e $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$, temos $u_1 \perp u_2$ e $\|u_1\| = \|u_2\|$.

A matri.

$u_1 = (a_1, b_1)$ $\quad u_1 \perp u_2 \quad a_1^2 + b_1^2 = 1$

$u_2 = (-b_1, a_1)$ $\quad -b_1^2 + a_1^2 = 1$

Uma matriz P tal que

$$P^{-1} \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$ pode ser

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$ e como $$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}}_{P^t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $P^t = P^{-1}$.

Assim $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} P$$

$$\iff P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^t = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 y & -b_1 x + a_1 y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 y \\ -b_1 x + a_1 y \end{bmatrix}$$

Se $X = a_1 x + b_1 y$
$Y = -b_1 x + a_1 y$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

Exemplos

(1) $\overbrace{32}^{A} x^2 + \overbrace{5.2}^{2C} xy \overbrace{- 7}^{B} y^2 + 180 = 0$

$$M = \begin{bmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} 32-x & 26 \\ 26 & -7-x \end{bmatrix} = (32-x)(-7-x) - 26^2$$

$$p_M(x) = x^2 - 25x - 900$$

$$x = \frac{25 \pm 65}{2} \qquad \lambda_1 = 45 \qquad \lambda_2 = -20$$

$$v_1 = (2, 1) \qquad u_1 = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

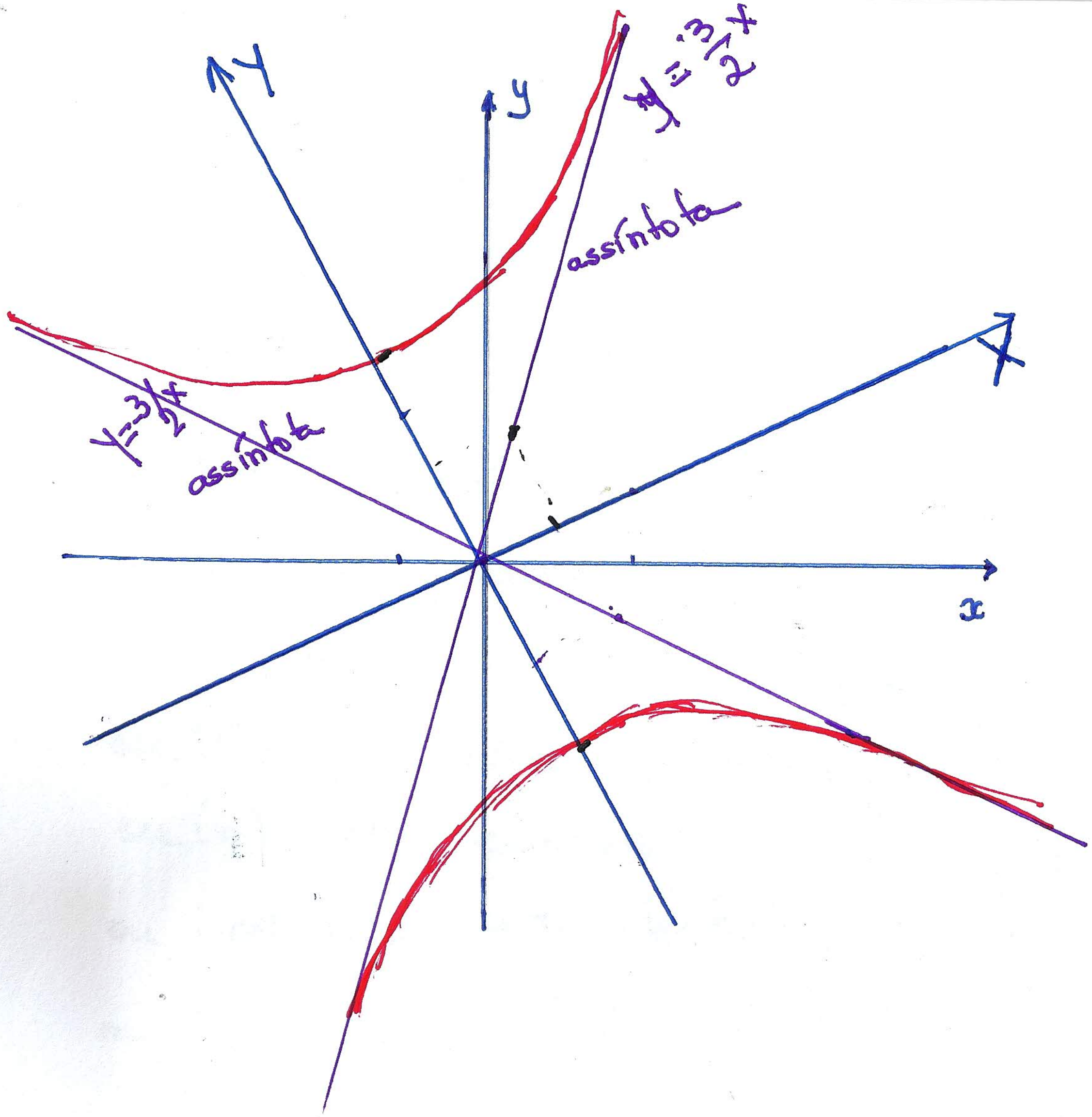
$$v_2 = (-1, 2) \qquad u_2 = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180$$

$$\Leftrightarrow 45X^2 - 20Y^2 = -180$$

$$\frac{45X^2}{180} - \frac{20}{180}Y^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1$$

HIPÉRBOLE



$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1$$

Assíntotas:

$$Y = \pm \frac{3}{2} X$$

Uma equação $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$

pode ser:

(1) ou ϕ

ou (2) um ponto

ou (3) uma reta

ou (4) uma união de 2 retas paralelas ou concorrentes

ou (5) uma circunferência

ou (6) uma elipse

ou (7) uma hipérbole

ou (8) uma parábola

Exemplos

(2) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$

é uma reta

$$(x + y + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow x + y + 1 = 0$$

(3) $x^2 + y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow x = y = 0 \quad (0, 0)$

(4) $x^2 + y^2 = -1 \quad \emptyset$

(5) $x^2 - y^2 = 0$ 2 retas concorrentes

(6) $(x + y + 1)(x + y + 2) = 0$

$x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 3y + 2 = 0$ } duas retas paralelas