Universidade de São Paulo

SLC0608 - Cálculo II
Resolução da Lista 2

Clara Andrade Sapio

10 de dezembro de 2020

Questão 1

a)

$$\int_0^1\int_1^2(x+2y)dxdy = \int_0^1[\frac{x^2}{2}+2yx]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^1(\frac{4}{2}+4y-\frac{1}{2}-2y)dy =$$

$$= \int_0^1(\frac{3}{2}+2y)dy = [\frac{3}{2}y+y^2]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$$

b)

$$\int_0^1\int_1^2(x-y)dxdy = \int_0^1[\frac{x^2}{2}-yx]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^1(\frac{4}{2}-2y-\frac{1}{2}+y)dy =$$

$$\int_0^1(\frac{3}{2}-y)dy = [\frac{3}{2}y-\frac{y^2}{2}]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

c)

$$\int_0^1\int_1^2\sqrt{x+y}dxdy = \int_0^1\int_1^2(x+y)^{1/2}dxdy = \int_0^1[\frac{(x+y)^{3/2}}{\frac{3}{2}}]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^1[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2}]_{x=1}^{x=2}dy =$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1((2+y)^{3/2}-(1+y)^{3/2})dy = \frac{2}{3}[\frac{(2+y)^{5/2}}{\frac{5}{2}}-\frac{(1+y)^{5/2}}{\frac{5}{2}}]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}\frac{2}{5}[\sqrt{(x+y)^5}-\sqrt{(1+y)^5}]_{y=0}^{y=1}$$

$$\frac{4}{15}[\sqrt{3^5}-\sqrt{2^5}-\sqrt{2^5}+\sqrt{1^5}] = \frac{4}{15}(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1)$$

d)

$$\int_0^1\int_1^2\frac{1}{x+y}dxdy = \int_0^1[ln|x+y|]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^1(ln|2+y|-ln|1+y|)dy$$

Lembre-se que, fazendo integração por partes ($ln(y)=u$, $dv=dy$), obtemos:

$$\int ln(y)dy = ylny - y$$

Portanto:

$$\int_0^1(ln|2+y|-ln|1+y|)dy = [(2+y)ln|2+y|-(2+y)-(1+y)ln|1+y|+(1+y)]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= 3ln(3)-3-2ln(2)+2-2ln(2)+2+1ln(1)-1 = 3ln(3)-4ln(2)$$

e)

$$\int_1^2\int_0^1 xcos(xy)dydx = \int_1^2[x\frac{sen(xy)}{x}]_{y=0}^{y=1}dx = \int_1^2(senx-sen(0))dx =$$

$$= \int_1^2 senxdx = [-cosx]_{x=1}^{x=2} = -cos(2)+cos(1)$$

e)

$$\int_0^1\int_1^2 ycos(xy)dxdy = \int_0^1[y\frac{sen(xy)}{y}]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^1(sen(2y)-sen(y))dy =$$

$$= [-\frac{cos(2y)}{2} + cos(y)]_{y=0}^{y=1} = -\frac{cos(2)}{2} + cos(1) + \frac{cos(0)}{2} - cos(0) = -\frac{cos(2)}{2} + cos(1) - \frac{1}{2}$$

f)

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy = \int_0^1 \int_1^2 (x+y)^{-2} dxdy = \int_0^1 [\frac{(x+y)^{-1}}{(-1)}]_{x=1}^{x=2} dy =$$

$$\int_0^1 [-\frac{1}{x+y}]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^1 (-\frac{1}{2+y} + \frac{1}{1+y}) dy = [-ln|2+y| + ln|1+y|]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -ln(3) + ln(2) + ln(2) - ln(1) = 2ln(2) - ln(3)$$

g)

$$\int_0^1 \int_1^2 ye^{xy} dxdy = \int_0^1 [y\frac{e^{xy}}{y}]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^1 (e^{2y} - e^y) dy = [\frac{e^{2y}}{2} - e^y]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{e^2}{2} - e^1 - \frac{e^0}{2} + e^0 = \frac{e^2}{2} - e^1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

h)

$$\int_0^1 \int_1^2 xy^2 dxdy = \int_0^1 [y^2 \frac{x^2}{2}]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^1 (2y^2 - \frac{1}{2}y^2) dy =$$

$$= [2\frac{y^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

i)

$$\int_0^1 \int_1^2 xsen(\pi y) dxdy = \int_0^1 [\frac{x^2}{2} sen(\pi y)]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^1 (2sen(\pi y) - \frac{1}{2} sen(\pi y)) dy =$$

$$(2 - \frac{1}{2}) \int_0^1 sen(\pi y) dy = \frac{3}{2}[\frac{-cos(\pi y)}{\pi}]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2\pi}(-cos(\pi) + cos(0)) = \frac{3}{2\pi}(-(-1) + 1) = \frac{3}{\pi}$$

Questão 2

$$\int\int_A f(x)g(y) dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dxdy$$

Estamos integrando primeiro em relação à x e depois em relação à y. Note que como $g(y)$ é uma função só de y (e, portanto, não depende de x), pode sair da primitivação que faremos em relação à x, pois se comporta como se fosse uma constante multiplicando a função $f(x)$. Assim, suponha que $p(x)$ seja a primitiva de $f(x)$, isto é: $\int f(x) = p(x)$. Temos então que:

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dxdy = \int_c^d g(y)[p(x)]_{x=a}^{x=b} dy = (p(b) - p(a)) \int_c^d g(y) dy$$

Mas

$$p(b) - p(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Então:

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dxdy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy$$

Questão 3

a)

$$\int_1^2 \int_2^3 xy^2 dydx = \int_1^2 xdx \cdot \int_2^3 y^2 dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_2^3 =$$

$$= (\frac{4}{2} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{27}{3} - \frac{8}{3}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{3} = \frac{19}{2}$$

b)

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} xcos(y)dydx = \int_0^1 xdx \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos(y)dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot [seny]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c)

$$\int_0^2 \int_1^2 xlnydydx = \int_0^2 xdx \cdot \int_1^2 lnydy =$$

Lembre-se do resultado obtido para $\int lnydy$ no exercício **1.d**. Assim:

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot [ylny - y]_1^2 = (\frac{2^2}{2} - 0) \cdot (2ln(2) - 2 - ln(1) + 1) = 2(2ln(2) - 1)$$

d)

$$\int_0^3 \int_{-1}^1 xye^{x^2-y^2} dxdy = \int_0^3 \int_{-1}^1 xye^{x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_0^3 ye^{-y^2} dy \cdot \int_{-1}^1 xe^{x^2} dx$$

Fazendo $\int_{-1}^1 xe^{x^2} dx$ primeiro, podemos aplicar a seguinte substituição:

$$u \equiv x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Sendo assim, temos que se $x = -1$, $u = (-1)^2 = 1$ e quando $x = 1$, $u = 1^2 = 1$, assim,temos:

$$\int_{-1}^1 xe^{x^2} dx = \int_1^1 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}[e^u]_1^1 = \frac{1}{2}[e^1 - e^1] = 0$$

Sendo assim, temos que

$$\int_0^3 ye^{-y^2} dy \cdot \int_{-1}^1 xe^{x^2} dx = 0$$

e)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^2 x}{1+4y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 xdx \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4y^2} dy$$

Fazendo uma integral de cada vez:

i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 dx$$

Lembre-se da identidade trigonométrica:

$$sen^2x = \frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2}$$

Substituindo na integral e lembrando que $\int cos(2x)dx = \frac{sen(2x)}{2}$ (faça a substituição simples $2x = u$, $du = 2dx$).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2})dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{sen(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{sen(\pi)}{2} - 0 + \frac{sen(0)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

ii)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4y^2}dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2y)^2}dy$$

Substituição simples:

$$u = 2y \Rightarrow du = 2dy$$

Tal que, quando $y = 0$, $u = 0$ e quando $y = \frac{1}{2}$, temos que $u = 1$. Assim:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2y)^2}dy = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}[arctg(u)]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}[arctg(u)]_0^1 = \frac{1}{2}(arctg(1) - arctg(0)) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Tendo o resultado das duas integrais, temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2x dx \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4y^2}dy = \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{32}$$

Questão 4

a)

$$V = \int_0^1\int_0^1 (x+2y-0)dxdy = \int_0^1 [\frac{x^2}{2}+2yx]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1 (\frac{1}{2}+2y)dy = [\frac{1}{2}y+y^2]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

b)

$$V = \int_0^2\int_1^2 (\sqrt{xy}-0)dydx = \int_0^2\int_1^2 x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}dydx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx \cdot \int_1^2 y^{\frac{1}{2}}dy =$$
$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} \cdot \frac{2}{3}(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{4}{9}\sqrt{8}(\sqrt{8}-1)$$

c)

$$\int_0^1\int_0^1 (xye^{x^2-y^2}-0)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xye^{x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 xe^{x^2}dx \cdot \int_0^1 ye^{-y^2}dx$$

Fazendo uma integral de cada vez:

i)

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

Substituição:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Quando $x = 0$, $u = 0$ e quando $x = 1$, temos que $u = 1$. Assim:

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1 e^u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}[e^u]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$$

ii)

$$\int_0^1 ye^{-y^2}dy$$

Substituição:

$$v = -y^2 \Rightarrow dv = -2ydy$$

Quando $y = 0$, $v = 0$ e quando $y = 1$, $v = -1$. Assim:

$$\int_0^1 ye^{-y^2}dy = \int_0^{-1} e^v(-\frac{dv}{2}) = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^v dv = -\frac{1}{2}[e^v]_0^{-1} = -\frac{1}{2}(e^{-1}-e^0) = \frac{1}{2}(-e^{-1}+1)$$

Assim:

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx \cdot \int_0^1 ye^{-y^2}dx = \frac{1}{2}(e-1)\cdot\frac{1}{2}(-e^{-1}+1) = \frac{1}{4}(-1+e+e^{-1}-1) = \frac{1}{4}(e+e^{-1}-2)$$

d)

$$V = \int_0^1\int_0^1 (2-x^2-y^2)dxdy = \int_0^1 \left[2x - \frac{x^3}{3} - y^2x\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 (2-\frac{1}{3}-y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 (\frac{5}{3}-y^2)dy = \left[\frac{5}{3}y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{3}-\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

e)

$$V = \int_1^2\int_0^1 (x+y+2-x-y)dydx = \int_1^2\int_0^1 2dydx = \int_1^2 [2y]_{y=0}^{y=1}dx =$$

$$= \int_1^2 2dx = [2x]_{x=1}^{x=2} = 2\cdot 2 - 2\cdot 1 = 4-2 = 2$$

f)

$$V = \int_0^1 \int_0^1 (e^{x+y} - 1)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (e^x e^y - 1)dxdy = \int_0^1 [e^x e^y - x]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_0^1 (e{\cdot}e^y - 1 - e^0{\cdot}e^y)dy = \int_0^1 (e{\cdot}e^y - 1 - e^y)dy = [e{\cdot}e^y - y - e^y]_{y=0}^{y=1} = e{\cdot}e^1 - 1 - e^1 - e{\cdot}e^0 + 0 + e^0 =$$

$$= e^2 - 1 - e - e + 1 = e^2 - 2e$$

Questão 5

a)

Temos a seguinte região de integração:

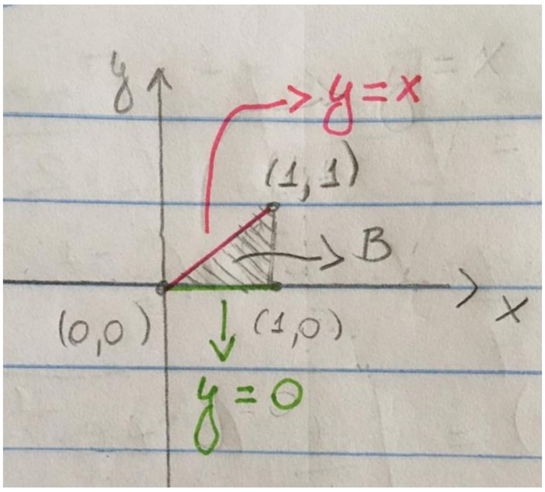

Figura 1: Triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1).

Temos então $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq x \leq 1$. Assim:

$$\int_0^1 \int_0^x ydydx = \int_0^1 [\frac{y^2}{2}]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

b)

A região de integração é tal que $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x + 2$. Assim:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{x+2} ydydx = \int_{-1}^1 [\frac{y^2}{2}]_{y=0}^{y=x+2} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x+2)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{(1+2)^3}{3} - \frac{(-1+2)^3}{3}) = \frac{1}{6}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

c)

Temos a seguinte região de integração:

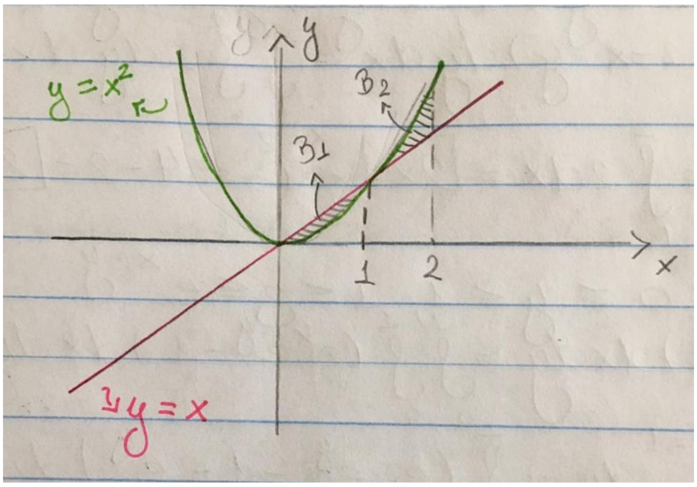

Figura 2: Região de integração

Assim, podemos ver que nossa região é subdividida em duas partes: B_1, onde $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq x$; e B_2, onde $1 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq x^2$, tal que $B = B_1UB_2$. Assim:

$$\int\int_B ydxdy = \int\int_{B_1} ydxdy + \int\int_{B_2} ydxdy$$

i) $B_1 : 0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq x$

$$\int_0^1\int_{x^2}^x ydydx = \int_0^1 [\frac{y^2}{2}]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2})dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{2}(\frac{5-3}{15}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

ii) $B_2 : 1 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq x^2$, tal que $B = B_1UB_2$

$$\int_1^2\int_x^{x^2} ydydx = \int_1^2 [\frac{y^2}{2}]_{y=x}^{y=x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^4 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3} - \frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{93-35}{15}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{58}{15} = \frac{29}{15}$$

Dessa forma:

$$\int\int_B ydxdy = \frac{1}{15} + \frac{29}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

d)

Temos a seguinte região de integração:

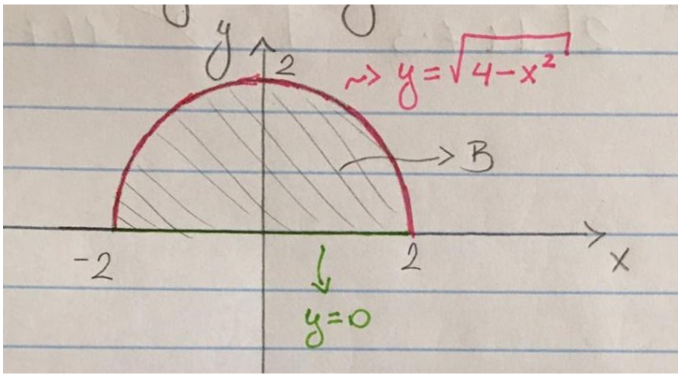

Figura 3: Semi-circunferência de raio 2 e centro na origem.

Assim, temos que $-2 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} ydydx = \int_{-2}^{2}[\frac{y^2}{2}]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}dx = \int_{-2}^{2}\frac{4-x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{1}{2}(8-\frac{8}{3}-(-8)-\frac{(-8)}{3}) = \frac{1}{2}(16-\frac{16}{3}) = \frac{1}{2}\frac{32}{3} = \frac{16}{3}$$

e)

Temos a seguinte região de integração:

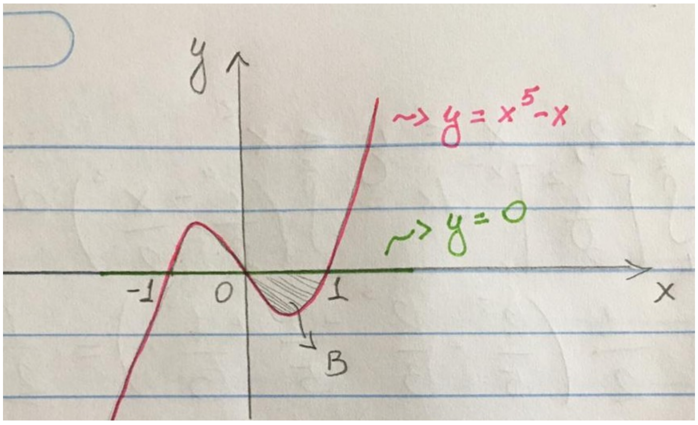

Figura 4: Região de integração B.

Logo, podemos perceber que $0 \leq x \leq 1$ e $x^5 - x \leq y \leq 0$. Assim:

$$\int_{0}^{1}\int_{x^5-x}^{0} ydydx = \int_{0}^{1}[\frac{y^2}{2}]_{y=x^5-x}^{y=0}dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x^5-x)^2dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x^{10}-2x^6+x^2)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{2x^7}{7} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{11}-\frac{2}{7}+\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}(\frac{21-66+77}{231}) = (-\frac{1}{2})\cdot(\frac{32}{231}) = -\frac{16}{231}$$

Questão 6

a) A região de integração que temos é:

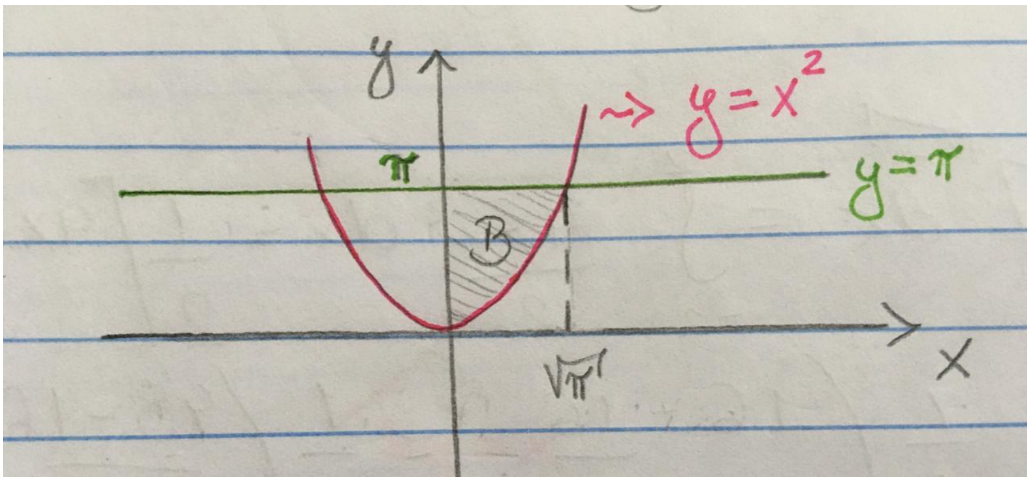

Figura 5: Região de integração.

Assim, temos:

$$0 \leq x \leq \sqrt{\pi} \quad e \quad x^2 \leq y \leq \pi$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\pi} x cos y dy dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x[sen y]_{y=x^2}^{y=\pi} dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x(sen(\pi) - sen(x^2))dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} -x sen(x^2) dx$$

Substituição:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Quando $x = 0$, $u = 0$ e quando $x = \sqrt{pi}$, $u = \pi$.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} -x sen(x^2) dx = \int_0^{\pi} -sen(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}[cos(u)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$$

b) Temos a seguinte região de integração:

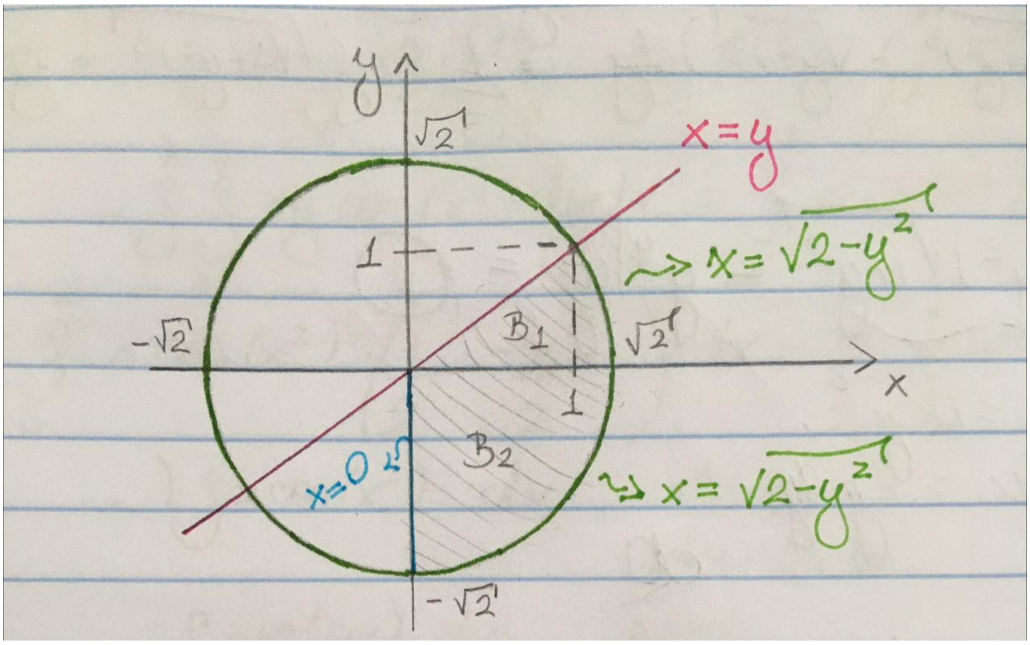

Figura 6: Região de integração.

Temos que subdividir a região em duas:

i) $B_1 : y \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$ e $0 \leq y \leq 1$.

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} xydxdy = \int_0^1 y[\frac{x^2}{2}]_y^{\sqrt{2-y^2}} dy = \int_0^1 y(\frac{2-y^2-y^2}{2})dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (2y-2y^3)dy =$$

$$= \int_0^1 (y-y^3)dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ii) $B_2 : 0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$ e $-\sqrt{2} \leq y \leq 0$

$$\int_{-\sqrt{2}}^0 \int_0^{\sqrt{2-y^2}} xydxdy = \int_{-\sqrt{2}}^0 y[\frac{x^2}{2}]_0^{\sqrt{2-y^2}} dy = \int_{-\sqrt{2}}^0 y(\frac{2-y^2}{2})dy = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^0 (2y-y^3)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_{-\sqrt{2}}^0 = \frac{1}{2}(-(-\sqrt{2})^2 + \frac{(-\sqrt{2})^4}{4}) = \frac{1}{2}(-2+1) = -\frac{1}{2}$$

Assim:

$$\int\int_B xydxdy = \int\int_{B_1} xydxdy + \int\int_{B_2} xydxdy = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Substituição:

$$u = x^2 + y^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Quando $x = 0$, temos que $u = y^2$ e quando $x = 1$, temos que $u = 1 + y^2$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{1+y^2} yu^{1/2}\frac{du}{2}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y[2\frac{u^{3/2}}{3}]_{y^2}^{1+y^2}dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y(\sqrt{(1+y^2)^3} - \sqrt{(y^2)^3}dy =$$

$$= \frac{1}{3}(\int_0^1 y(1+y^2)\sqrt{1+y^2}dy - \int_0^1 y^4 dy)$$

i)

$$\int_0^1 y(1+y^2)\sqrt{1+y^2}dy$$

Substituição:

$$u = 1 + y^2 \Rightarrow du = 2ydy$$

Quando $y = 0$, $u = 1$ e quando $y = 1$, $u = 2$. Assim:

$$\int_1^2 u\sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{3/2}du = \frac{1}{2}\left[\frac{2u^{5/2}}{5}\right]_1^2 = \frac{1}{5}(\sqrt{2^5} - \sqrt{1^5}) = \frac{1}{5}(4\sqrt{2} - 1)$$

ii)

$$\int_0^1 y^4 dy = \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

Assim:

$$\frac{1}{3}(\int_0^1 y(1+y^2)\sqrt{1+y^2}dy - \int_0^1 y^4 dy) = \frac{1}{3}(\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1) - \frac{1}{5}) = \frac{4\sqrt{2}-2}{15}$$

d)

$$\int_2^3 \int_0^{1/y} \frac{1}{ln(y)}dxdy = \int_2^3 \frac{1}{ln(y)}\frac{1}{y}dy$$

Substituição:

$$u = ln(y) \Rightarrow du = \frac{1}{y}dy$$

Quando $y = 2$, temos que $u = ln(2)$ e quando $y = 3$, temos que $u = ln(3)$. Assim:

$$\int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{1}{u}du = [ln(u)]_{ln(2)}^{ln(3)} = ln(ln(3)) - ln(ln(2))$$

e)

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 xycos(x^2)dydx = \int_0^1 xcos(x^2)[\frac{y^2}{2}]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 xcos(x^2)(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2})dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (xcos(x^2) - x^5cos(x^2))dx$$

i)

$$\int_0^1 xcos(x^2)dx$$

Substituição:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Quando $x = 0$, $u = 0$ e quando $x = 1$, $u = 1$.

$$\int_0^1 cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 cos(u)du = \frac{1}{2}[sen(u)]_0^1 = \frac{1}{2}sen(1) = \frac{sen(1)}{2}$$

ii)

$$\int_0^1 x^5cos(x^2)dx = \int_0^1 x \cdot x^4cos(x^2)dx$$

Substituição:

$$a = x^2 \Rightarrow da = 2xdx$$

Quando $x = 0$, $a = 0$ e quando $x = 1$, $u = 1$:

$$\int_0^1 a^2cos(a)\frac{da}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 a^2cos(a)da$$

Para concluir, vá fazendo integração por partes ($u = a^2$, $dv = cos(a)da$ e assim vai...). Assim:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 a^2cos(a)da = cos(1) - \frac{sen(1)}{2}$$

Dessa forma:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (xcos(x^2) - x^5cos(x^2))dx = \frac{1}{2}(\frac{sen(1)}{2} - cos(1) + \frac{sen(1)}{2}) = -\frac{cos(1)}{2} + \frac{sen(1)}{2}$$

Questão 7

Para esse exercício, temos que entender a região de integração e analisar os extremos conforme o sentido em que os valores crescem em x e em y (y cresce "para cima"e os valores em x vão crescendo da esquerda para a direita). Dentro da região de integração, basta analisar as funções seguindo o sentido de crescimento das variáveis x e y nos eixos e aí colocar uma em função da outra (x em função de y ou y em função de x).

a) Temos:

$$0 \leq x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq y \leq x$$

A região de integração é:

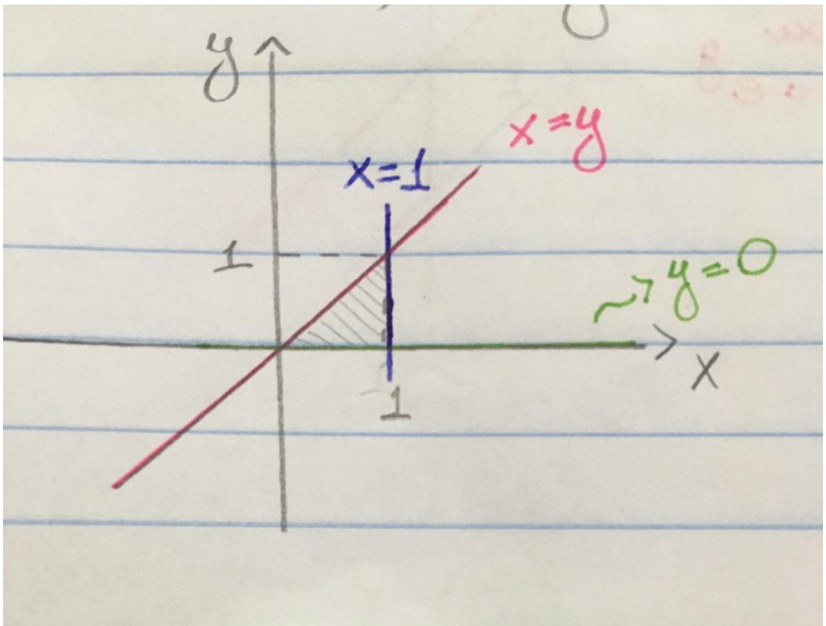

Figura 7: Região de integração.

Invertendo a ordem:

$$\int_0^1 [\int_0^x f(x,y)dy]dx = \int_0^1 [\int_y^1 f(x,y)dx]dy$$

b) Temos:

$$0 \leq x \leq 1 \quad e \quad x^2 \leq y \leq x$$

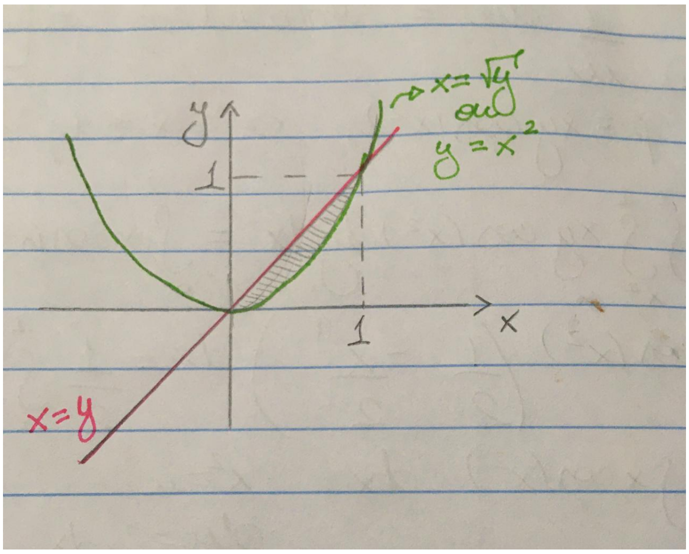

Figura 8: Região de integração.

Invertendo a ordem:

$$\int_0^1 [\int_{x^2}^x f(x,y)dy]dx] = \int_0^1 [\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx]dy$$

c) Temos:

$$0 \leq y \leq 1 \quad e \quad -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$$

Note que $x = -\sqrt{y}$ é o ramo esquerdo da parábola $y = x^2$ e $x = \sqrt{y}$ é o ramo direito da parábola $y = x^2$. Por isso, temos o seguinte desenho:

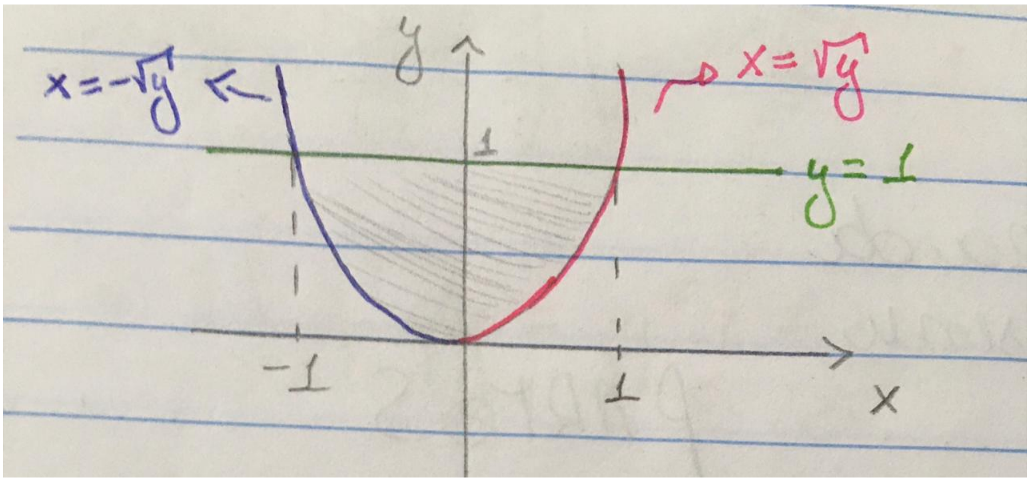

Figura 9: Região de integração.

Invertendo a ordem:

$$\int_0^1 [\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx]dy = \int_{-1}^1 [\int_{x^2}^1 f(x,y)dy]dx$$

d) Temos:

$$1 \leq x \leq e \quad e \quad ln(x) \leq y \leq x$$

Temos seguinte região de integração:

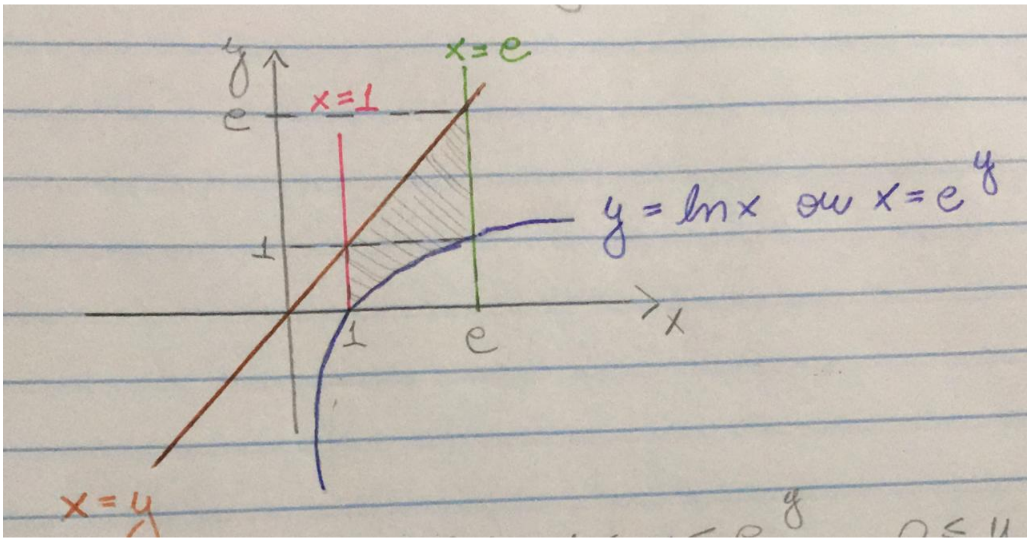

Figura 10: Região de integração.

Para colocarmos y com extremos fixos e x em função de y, precisamos subdividir a região em 2 partes. Assim, a ordem de integração invertida fica:

$$\int_1^e [\int_{ln(x)}^x f(x,y)dy]dx = \int_0^1 [\int_1^{e^y} f(x,y)dx]dy + \int_1^e [\int_y^e f(x,y)dx]dy$$

e) Temos:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad e \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Note que $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ é equivalente à circunferência de centro na origem e raio 1 (eleve os 2 lados ao quadrado e teremos $y^2 = 1 - x^2$ e, portanto, $y^2 + x^2 = 1$). A região de integração então fica: (x já está escrito em função de y, depois que já notamos se tratar de uma circunferência de raio 1 e centro (0,0)).

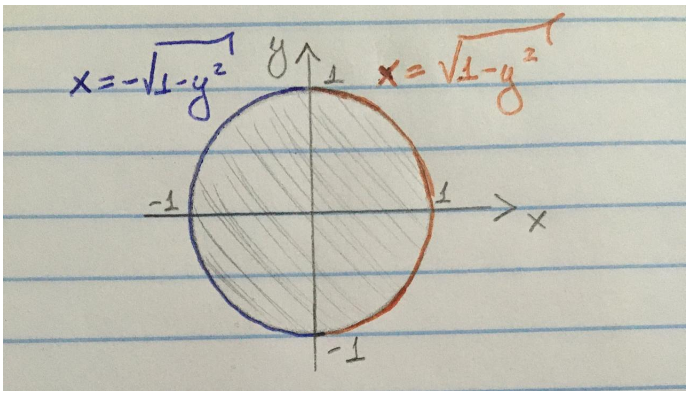

Figura 11: Região de integração.

Invertendo a ordem de integração:

$$\int_{-1}^1 [\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy]dx = \int_{-1}^1 [\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx]dy$$

f) Temos:

$$0 \leq y \leq 1 \quad e \quad y \leq x \leq y+3$$

A região de integração é:

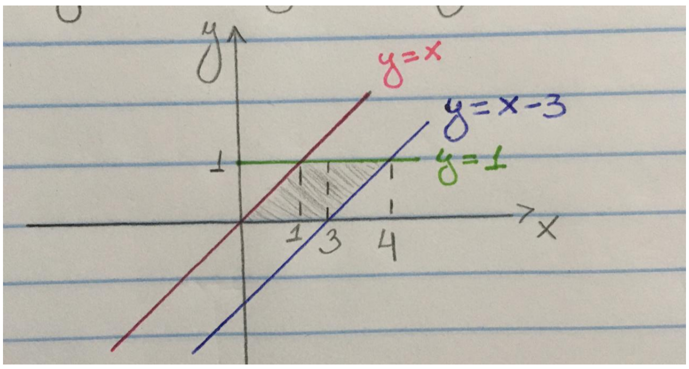

Figura 12: Região de integração.

Para invertermos a ordem de integração, devemos deixar a variável x com extremos fixos e colocar y como função de x. Perceba pela figura que não dá para colocarmos tudo em uma só integral, pois as funções em y tem variação primeiro de $y = 0$ até $y = x$, depois de $y = 0$ até $y = 1$ e por fim de $y = x - 3$ até $y = 1$. Logo, invertendo a ordem de integração:

$$\int_0^1 [\int_y^{y+3} f(x,y)dx]dy = \int_0^1 [\int_0^x f(x,y)dy]dx + \int_1^3 [\int_0^1 f(x,y)dy]dx + \int_3^4 [\int_{x-3}^1 f(x,y)dy]dx$$

Questão 8

a)

Note que $x^2 + y^2 \leq 1$ trata-se de uma circunferência de raio 1 e centro na origem do plano xy. Assim, podemos usar coordenadas polares e calcular a integral baseada nos limites de r e θ. Fazendo:

$$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad e \quad 0 \leq r \leq 1$$

Assim, o volume fica $\int\int 4 - (x + y + 2)dxdy = \int\int (2 - x - y)dxdy$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2 - rcos\theta - rsen\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r - r^2cos\theta - r^2sen\theta)drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r^2 - cos\theta\frac{r^3}{3} - sen\theta\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi}(1 - \frac{cos\theta}{3} - \frac{sen\theta}{3})d\theta = \left[\theta - \frac{sen\theta}{3} + \frac{cos\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} =$$

$$= 2\pi - \frac{sen(2\pi)}{3} + \frac{cos(2\pi)}{3} - 0 + \frac{sen(0)}{3} - \frac{cos(0)}{3} = 2\pi$$

b)

A região de integração que temos é:

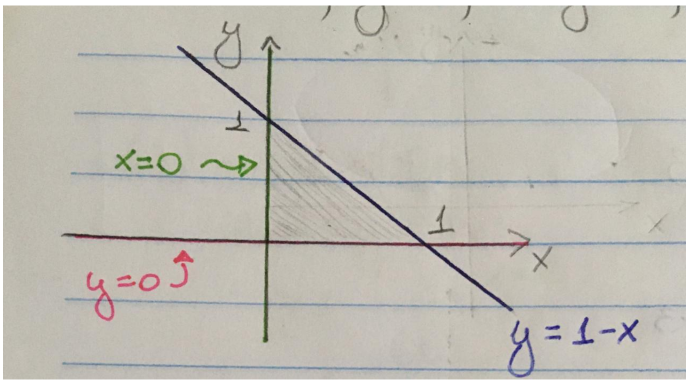

Figura 13: Região de integração.

Então temos os seguintes limites:

$$0 \leq x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2-0)dydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)dydx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3})dx = \int_0^1 (x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - \frac{3x}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3})dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{3} - x)dx = \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

c) Temos a seguinte região de integração:

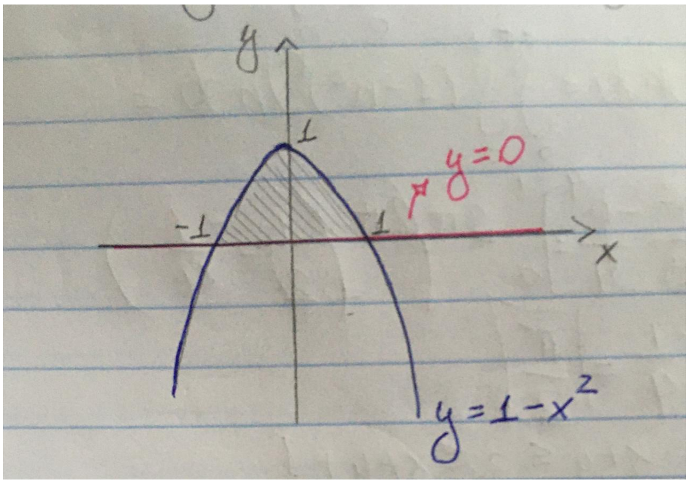

Figura 14: Região de integração.

Logo, temos:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad e \quad 0 \leq y \leq 1-x^2$$

O volume então será:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (1-x^2-0)dydx = \int_{-1}^1 [y - x^2y]_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 (1-x^2-x^2(1-x^2))dx = \int_{-1}^1 (1-x^2-x^2+x^4)dx =$$

$$= \int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4)dx = \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - (-1) + \frac{2}{3}(-1) - \frac{(-1)^5}{5} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{30-20+6}{15} = \frac{16}{15}$$

d)

Para encontrarmos a projeção do nosso sólido no plano xy, podemos fazer a intersecção entre as duas superfícies que limitam z, isto é:

$$x^2 + y^2 + 3 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Note que a região obtida ($x^2 + y^2 = 1$) é uma circunferência no plano xy centrada em (0,0) e de raio 1. De novo, podemos usar coordenadas polares:

$$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad e \quad 0 \leq r \leq 1$$

O volume da região então será dado por

$$V = \int\int (4 - (x^2 + y^2 + 3))dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta)rdrd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2(cos^2\theta + sen^2\theta))rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3)drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})\int_0^{2\pi} d\theta = (\frac{2}{4} - \frac{1}{4})2\pi = \frac{\pi}{2}$$

e)

Note que $x^2 + 4y^2 = 4$, pode ser reescrita como $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$. Vemos então que essa equação representa uma elipse de semieixo maior x e semieixo menor y (quando $x = 0$, temos $y = \pm 1$ e quando $y = 0$, temos $x = \pm 2$). Usando coordenadas polares:

$$x = 2rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad e \quad 0 \leq r \leq 1$$

O volume da região em coordendas cartesianas seria:

$$V = \int\int (x + y + 1 - (x + y))dxdy = \int\int 1dxdy$$

Em coordenadas polares (lembre-se de multiplicar o integrando por $2r$, por causa da mudança de coordenadas):

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1 \cdot 2rdrd\theta = \int_0^{2\pi}[r^2]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Questão 9

a)

$$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad e \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2cos^2\theta + 2rsen\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^3cos^2\theta + 2r^2sen\theta)drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[cos^2\theta\frac{r^4}{4} + 2sen\theta\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi}(4cos^2\theta + \frac{16}{3}sen\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} 4cos^2\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4(\frac{1+cos(2\theta)}{2})d\theta = 2\int_0^{2\pi}(1+cos(2\theta))d\theta = 2\left[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

b)

$$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad e \quad 1 \leq r \leq 2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\cdot rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}[\frac{r^4}{4}]_1^2 d\theta = 2\pi(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}) = 2\pi\cdot(\frac{15}{4}) = \frac{15}{2}\pi$$

c) Note:

$$4x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + y^2 = 1$$

$$y = rsen\theta$$

$$\frac{x}{(\frac{1}{2})} = rcos\theta \Rightarrow x = \frac{1}{2}rcos\theta$$

Note que:

$$\frac{(\frac{1}{2}rcos\theta)^2}{(\frac{1}{2})^2} + r^2sen^2\theta = 1 \Rightarrow r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

Assim, temos:

$$0 \leq r \leq 1 \quad e \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\frac{1}{2}rcos\theta)^2\frac{1}{2}rdrd\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3cos^2\theta)drd\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} cos^2\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} cos^2\theta = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}(\frac{1+cos(2\theta)}{2}) = \frac{1}{64}[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2}]_0^{2\pi} = \frac{1}{64}2\pi = \frac{\pi}{32}$$

d) Note que temos a mesma elipse do exercício **c**, com a diferença de que estamos pegando apenas a parte positiva de y, o que implica que $0 \leq \theta \leq \pi$. Assim, temos:

$$\int_0^\pi \int_0^1 (sen(4(\frac{1}{2}rcos\theta)^2 + rsen^2\theta))\frac{1}{2}rdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^1 sen(4\frac{1}{4}r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta)rdrd\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^1 sen(r^2)rdrd\theta$$

Substituição:

$$u = r^2 \Rightarrow du = 2rdr \Rightarrow rdr = \frac{du}{2}$$

Temos que para $r = 0$, $u = 0$ e para $r = 1$, $u = 1$. Assim, a integral fica:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^1 sen(u)\frac{du}{2}d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi \int_0^1 sen(u)dud\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi [-cos(u)]_0^1 d\theta = \frac{(-cos(1) + cos(0))}{4}\int_0^\pi d\theta =$$

$$= \frac{(1 - cos(1))}{4}\pi$$

e) Note que o conjunto B (região de integração) é o mesmo que na questão **b**, logo, usaremos a mesma parametrização. Temos então:

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 e^{r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 e^{r^2}rdrd\theta$$

Substituindo:

$$u = r^2 \Rightarrow du = 2rdr \Rightarrow rdr = \frac{du}{2}$$

Quando $r = 1$, temos que $u = 1$ e quando $r = 2$, $u = 4$. Assim:

$$\int_0^{2\pi} \int_1^4 e^u \frac{du}{2}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [e^u]_1^4 d\theta = \frac{1}{2}(e^4 - e^1)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}(e^4 - e)2\pi = (e^4 - e)\pi$$

f) Note que:

$$x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$$

Reconhecemos então que essa equação se trata de uma circunferência de raio 1/2 e centro (1/2,0). Podemos então fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$x = \frac{1}{2} + rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2} \quad e \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Assim:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+rcos\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}r+r^2cos\theta) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{4}+cos\theta\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\frac{1}{2}}drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}(\frac{1}{16}+\frac{1}{24}cos\theta)d\theta = (\frac{1}{16}\theta+\frac{1}{24}sen\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{16}2\pi = \frac{\pi}{8}$$

g) Temos a seguinte região de integração:

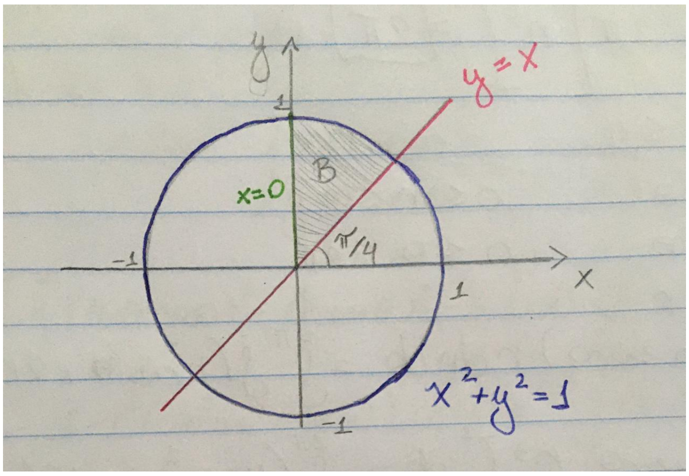

Figura 15: Região de integração.

Em coordenadas polares, temos:

$$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad e \quad 0 \leq r \leq 1$$

A integral então fica:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(r^2sen^2\theta)rdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3sen^2\theta drd\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen^2\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen^2\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{1}{6}[\theta-\frac{sen(2\theta)}{2}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2}-\frac{sen(\pi)}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{sen(\frac{\pi}{2})}{2}) = \frac{\pi+2}{24}$$

h) Note que

$$x^2+y^2-2y = 0 \Rightarrow x^2+y^2-2y+1 = 1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = 1$$

Reconhecemos que essa equação é uma circunferência de centro (0,1) e raio 1. Assim, podemos parametrizar:

$$x = rcos\theta \quad y = 1 + rsen\theta$$

Lembrando que $x \geq 0$, teremos:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad e \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (rcos\theta(1 + rsen\theta))rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2cos\theta + r^3cos\theta sen\theta)drd\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}cos\theta + \frac{r^4}{4}cos\theta sen\theta\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{3}cos\theta + \frac{1}{4}\frac{sen(2\theta)}{2})d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{3}sen\theta - \frac{cos(2\theta)}{16}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} = \frac{2}{3}$$

Questão 10

a) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ e $\gamma(t) = (cost, sent)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (cost, sent)$$
$$\gamma'(t) = (-sent, cost)$$

Portanto:

$$\int_0^{2\pi} (cost, sent) \cdot (-sent, cost)dt = \int_0^{2\pi} (-costsent + sentcost)dt = \int_0^{2\pi} 0dt = 0$$

b) $\vec{F}(x, y) = (0, 0, x + y)$ e $\gamma(t) = (t, 1 - t^2, 0)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (0, 0, 0)$$
$$\gamma'(t) = (1, -2t, 0)$$

Portanto:

$$\int_0^1 (0, 0, 0) \cdot (1, -2t, 0)dt = \int_0^1 0dt = 0$$

c) $\vec{F}(x, y) = (0, x^2)$ e $\gamma(t) = (t^2, 3)$, $-1 \leq t \leq 1$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (0, t^4)$$

$$\gamma'(t) = (2t, 0)$$

Portanto:

$$\int_{-1}^{1} (0, t^4) \cdot (2t, 0) dt = \int_{-1}^{1} 0dt = 0$$

d) $\vec{F}(x, y) = (x^2, x - y)$ e $\gamma(t) = (t, sent)$, $0 \leq t \leq \pi$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (t^2, t - sent)$$
$$\gamma'(t) = (1, cost)$$

Portanto:

$$\int_0^\pi (t^2, t - sent) \cdot (1, cost)dt = \int_0^\pi (t^2 + tcost - sentcost)dt =$$

(Dica: a integral $\int tcostdt$ pode ser feita por partes, chamando $t = u$ e $dv = costdt$ e a integral $\int -sentcost$ pode ser feita por substituição simples fazendo $u = cost \Rightarrow du = -sentdt$). Assim, obtemos

$$= \left[\frac{t^3}{3} + tsent + cost - \frac{1}{2}sen^2t\right] = \frac{\pi^3}{3} - 2$$

e) $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$ e $\gamma(t) = (2cost, 3sent)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (4cos^2t, 9sen^2t)$$
$$\gamma'(t) = (-2sent, 3cost)$$

Portanto:

$$\int_0^{2\pi} (4cos^2t, 9sen^2t) \cdot (-2sent, 3cost)dt = \int_0^{2\pi} (-8cos^2tsent + 27sen^2tcost)dt =$$

(Dica: as duas integrais podem ser feitas por substituição simples, a primeira fazendo $u = cost \Rightarrow du = -sentdt$ e segunda fazendo $u = sent \Rightarrow du = costdt$). Assim, obtemos:

$$= \left[\frac{8}{3}cos^3(t) + 9sen^3(t)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Questão 11

a)

$$\vec{F}(x, y) = (x, y)$$
$$\vec{F}(\gamma(t)) = (t^2, sent) \quad \gamma'(t) = (2t, cost)$$
$$\int_0^{\pi/2} (t^2, sent) \cdot (2t, cost)dt = \int_0^{\pi/2} (2t^3 + sentcost)dt = \int_0^{\pi/2} (2t^3 + \frac{sen(2t)}{2})dt =$$

$$= \left[2\frac{t^4}{4} - \frac{cos(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{4}\frac{\pi^4}{2^4} - \frac{cos(\pi)}{4} - 0 + \frac{cos(0)}{4} = \frac{\pi^4}{32} + \frac{1}{2}$$

b)

$$\vec{F}(x,y) = (x, -y)$$

Note que $\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ é a função potencial de $\vec{F}(x,y)$, pois $\vec{F}(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}$. Assim, o campo de F é conservativo e a integral de linha fica:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(2,3) - \phi(1,1) = \frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{4-9}{2} = -\frac{5}{2}$$

c)

$$\vec{F}(x,y) = (2, -1)$$

A curva γ é mostrada na imagem abaixo:

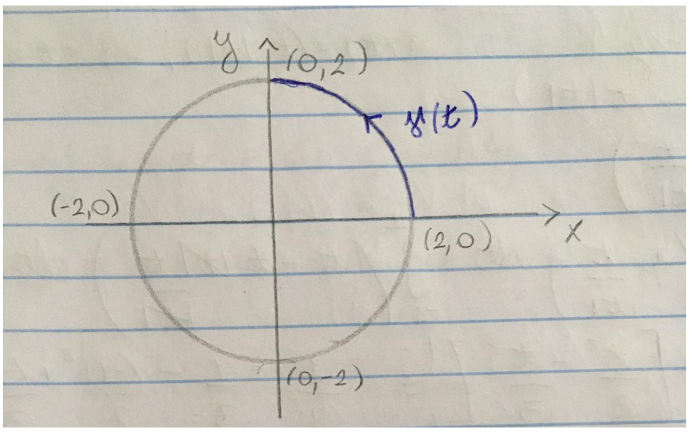

Figura 16: Curva.

Podemos então parametrizar a curva da seguinte maneira:

$$\gamma(t) = (2cost, 2sent) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim:

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (2, -1)$$

$$\gamma'(t) = (-2sent, 2cost)$$

Portanto:

$$\int_0^{\pi/2}(2,-1)\cdot(-2sent, 2cost)dt = \int -0^{\pi/2}(-4sent - 2cost)dt = [4cost - 2sent]_0^{\pi/2} =$$

$$= 4cos(\frac{\pi}{2}) - 2sen(\frac{\pi}{2}) - 4cos(0) + 2sen(0) = -2 - 4 = -6$$

d)

$$\vec{F}(x,y) = (xe^x, -x-2y)$$
$$\vec{F}(\gamma(t)) = (te^t, -t-2t^2)$$
$$\gamma'(t) = (1, 2t)$$

Assim:

$$\int_0^1 (te^t, -t-2t^2)\cdot(1,2t)dt = \int_0^1 (te^t - 2t^2 - 4t^3)dt = \left[te^t - e^t - 2\frac{t^3}{3} - 4\frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 1e^1 - e^1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{4} - 0 + 1 + 0 + 0 = -\frac{2}{3}$$

e)

$$\vec{F}(x,y) = (x, -xy)$$
$$\vec{F}(\gamma(t)) = (t, -t|t|)$$
$$\gamma'(t) = (1, \frac{t}{|t|})$$

Assim:

$$\int_{-1}^1 (t, -t|t|)\cdot(1, \frac{t}{|t|})dt = \int_{-1}^1 (t - t|t|\frac{t}{|t|})dt = \int_{-1}^1 (t-t^2)dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

f)

$$\vec{F}(x,y) = (x,y)$$

Note que $\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ é a função potencial de $\vec{F}(x,y)$, pois $\vec{F}(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}$. Assim, o campo de F é conservativo e a integral de linha fica:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(2,1) - \phi(0,0) = \frac{2^2}{2} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{2}$$

Questão 12

a)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x \quad (1)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = y \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x,y) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = h'(y)$$

Comparando com (2):

$$h'(y) = y \Rightarrow h(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2}$$

Assim:

$$\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

b)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x,y) = \int 2xy dx = 2y\frac{x^2}{2} + h(y) \Rightarrow \phi(x,y) = x^2 y + h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + h'(y)$$

Comparando com (2):

$$x^2 + h'(y) = x^2 \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c = constante$$

Assim:

$$\phi(x,y) = x^2 y$$

c)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x,y) = \int 2xe^{x^2+y^2} dx = \int 2xe^{x^2}e^{y^2} dx = e^{x^2}e^{y^2} + h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^{x^2} 2ye^{y^2} + h'(y) = 2ye^{x^2+y^2} + h'(y)$$

Comparando com (2):

$$2ye^{x^2+y^2} + h'(y) = 2ye^{x^2+y^2} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c = constante$$

Assim:

$$\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

d)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y \quad (1)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x,y) = \int y dx = yx + h(y)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + h'(y)$$

Comparando com (2):

$$x + h'(y) = x \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c = constante$$

Assim:

$$\phi(x,y) = xy$$

e)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2 \quad (1)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x^3y \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x,y) = \int (3x^2y^2 + 2)dx = 3\frac{x^3}{3}y^2 + 2x + h(y) \Rightarrow \phi(x,y) = x^3y^2 + 2x + h(y)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x^3y + h'(y)$$

Comparando com (2):

$$2x^3y + h'(y) = 2x^3y \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c = constante$$

Assim:

$$\phi(x,y) = x^3y^2 + 2x$$

Questão 13

$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx$$

Substituição:

$$u(x) = x^2+y^2 \Rightarrow du = 2xdx$$

Assim:

$$\phi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}ln|u| + h(y) \Rightarrow \phi(x,y) = \frac{1}{2}ln(x^2+y^2) + h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} + h'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + h'(y)$$

Comparando com (2):

$$\frac{y}{x^2+y^2} + h'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c = constante$$

Assim:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}ln(x^2+y^2)$$

Questão 14

$$\vec{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]\right)\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]\right)\vec{k} =$$

$$\left(\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\vec{k} = 0\vec{k}$$

Questão 15

Para mostrarmos que um campo não é conservativo, basta provarmos que o seu rotacional é diferente de zero, onde:

$$rot(\vec{F}) = (\frac{\partial F_j}{\partial x} - \frac{\partial F_i}{\partial y})\vec{k}$$

a) Note que:

$$F_i = -y \quad F_j = x$$

Assim:

$$rot(\vec{F}) = (\frac{\partial [x]}{\partial x} - \frac{\partial [-y]}{\partial y})\vec{k} = (1 - (-1))\vec{k} = 2\vec{k}$$

Como $rot(\vec{F}) \neq \vec{0}$, segue que $\vec{F}$ não é conservativo.

b) Note que

$$F_i = x^3y^2 \quad F_j = x^2y$$

Assim:

$$rot(\vec{F}) = (\frac{\partial [x^2y]}{\partial x} - \frac{\partial [x^3y^2]}{\partial y})\vec{k} = (2xy - 2x^3y)\vec{k}$$

Como $rot(\vec{F}) \neq \vec{0}$, segue que $\vec{F}$ não é conservativo.

c) Idêntico ao item **b**.

d) Note que:

$$F_i = x - y \quad F_j = x^2y^2$$

Assim:

$$rot(\vec{F}) = (\frac{\partial [x^2y^2]}{\partial x} - \frac{\partial [x - y]}{\partial y})\vec{k} = (2xy^2 - (-1))\vec{k} = (2xy^2 + 1)\vec{k}$$

Como $rot(\vec{F}) \neq \vec{0}$, segue que $\vec{F}$ não é conservativo.

Questão 16

a)

$$\vec{F}(x, y) = (x, e^{y^2})$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (2cost, e^{sen^2 t})$$

$$\gamma'(t) = (-2sent, cost)$$

Assim:

$$\int_0^{2\pi} (2cost, e^{sen^2 t}) \cdot (-2sent, cost)dt = \int_0^{2\pi} (-4costsent + coste^{sen^2 t})dt =$$

Lembre-se de que a integral de 0 a 2π da função sen(t) e cos(t) é sempre zero. Assim, temos:

$$\int_0^{2\pi} (-4costsent + coste^{sen^2 t})dt = 0$$

b)

Do exercício **13**):

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2)$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(0,1) - \phi(1,0) = \frac{1}{2}ln(1) - \frac{1}{2}ln(1) = 0$$

c)

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \left(\frac{-sent}{cos^2 t + sen^2 t}, \frac{cost}{cos^2 t + sen^2 t}\right) = (-sent, cost)$$

$$\gamma'(t) = (-sent, cost)$$

$$\int_0^{2\pi} (-sent, cost) \cdot (-sent, cost)dt = \int_0^{2\pi} (sen^2 t + cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} 1dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

d)

Do **12) b)**:

$$\phi(x,y) = x^2y$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\gamma(2)) - \phi(\gamma(1)) = \phi(2,4) - \phi(1,1) = 2^2\cdot 4 - 1^2\cdot 1 = 16 - 1 = 15$$

e)

Do exercício **12) c)**:

$$\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\gamma(3)) - \phi(\gamma(0)) = \phi(9,27) - \phi(0,0) = e^{9^2+27^2} - e^0 = e^{810} - 1$$

f)

Do exercício **12) e)**:

$$\phi(x,y) = x^3y^2 + 2x$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\gamma(\pi)) - \phi(\gamma(0)) = \phi(-1,0) - \phi(1,0) = -2 - 2 = -4$$

Questão 17

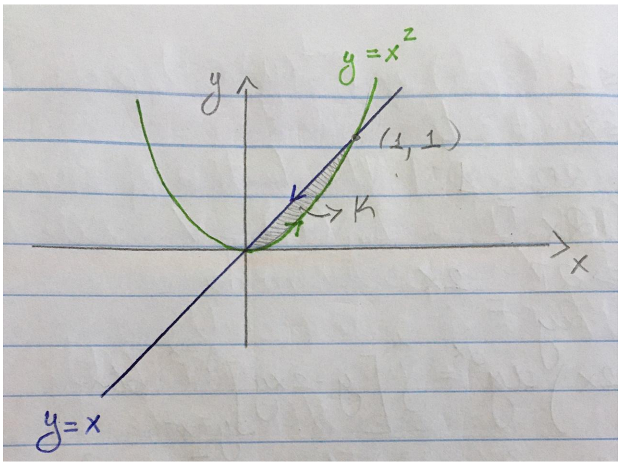

Figura 17: Região K orientada positivamente.

Primeiro Método: Precisamos parametrizar a curva azul e a curva verde que envolvem a região K, com a orientação das setas mostradas na figura.

Curva em azul:

$$\gamma_1(t) = (-t, -t) \quad -1 \leq t \leq 0$$
$$\vec{F}(\gamma_1(t)) = (t^2, -t + t^2)$$
$$\gamma_1'(t) = (-1, -1)$$

Assim:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{0} (t^2, -t + t^2) \cdot (-1, -1) dt = \int_{-1}^{0} (-t^2 + t - t^2) dt = \int_{-1}^{0} (-2t^2 + t) dt =$$

$$= \left[-2\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{0} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{7}{6}$$

Curva em verde:

$$\gamma_2(t) = (t, t^2) \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$\vec{F}(\gamma_2(t)) = (2t^3 - t^2, t + t^4)$$
$$\gamma_2'(t) = (1, 2t)$$

Assim:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{!} (2t^3 - t^2, t + t^4) \cdot (1, 2t) dt = \int_{0}^{1} (2t^3 + t^2 + 2t^5) dt =$$

$$= \left[2\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} \right]_{0}^{1} = \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

Assim, temos:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{7}{6} + \frac{7}{6} = 0$$

Segundo Método: Note que a região de integração desenhada (K) pode ser descrita assim:

$$0 \leq x \leq 1 \quad ex^2 \leq y \leq x$$

Note também que:

$$Q = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$P = 2xy - x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

Assim:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^2 (1-2x)dydx = \int_0^1 [y-2xy]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x - 3x^2 + 2x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x^3 + 2\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + 2\frac{1}{4} = 0$$

b)

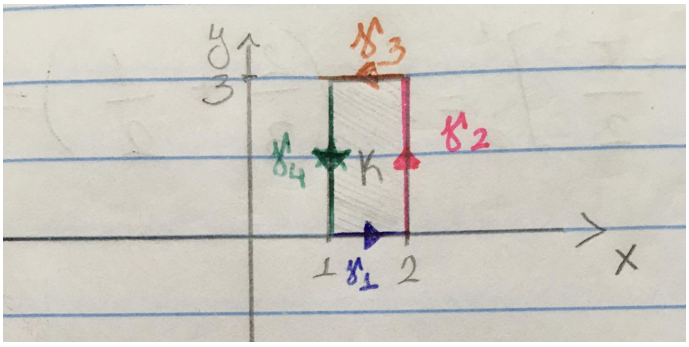

Figura 18: Região K orientada positivamente.

Primeiro Método: Parametrizar as curvas γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4 tal que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

1) $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $1 \leq t \leq 2$

$$\gamma_1'(t) = (1, 0)$$
$$\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, 0)$$

Assim:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

2) $\gamma_2(t) = (2, t)$, $0 \leq t \leq 3$

$$\gamma_2'(t) = (0, 1)$$
$$\vec{F}(\gamma_2(t)) = (2t, -4t)$$

Assim:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 (2t, -4t) \cdot (0, 1)dt = \int_0^3 -4tdt = \left[-4\frac{t^2}{2}\right]_0^3 = -18$$

3) $\gamma_3(t) = (-t, 3)$, $-2 \leq t \leq -1$

$$\gamma_3'(t) = (-1, 0)$$

$$\vec{F}(\gamma_3(t)) = (-3t, 6t)$$

Assim:

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{-1} (-3t, 6t) \cdot (-1, 0) dt = \int_{-2}^{-1} 3t dt = \left[3\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{3}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = -\frac{9}{2}$$

4) $\gamma_4(t) = (1, -t)$, $-3 \leq t \leq 0$

$$\gamma_4'(t) = (0, -1)$$
$$\vec{F}(\gamma_4(t)) = (-t, 2t)$$

Assim:

$$\int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-3}^{0} (-t, 2t) \cdot (0, -1) dt = \int_{-3}^{0} -2t dt = [-t^2]_{-3}^{0} = 9$$

Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 - 18 - \frac{9}{2} + 9 = -\frac{27}{2}$$

Segundo Método: Note que

$$P = xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x$$
$$Q = -2xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$$

E a região de integração é descrita de forma que $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 3$. Assim:

$$\int_1^2 \int_0^3 (-2y - x) dy dx = \int_1^2 [-y^2 - xy]_{y=0}^{y=3} dx \int_1^2 (-9 - 2x) dx =$$
$$\left[-9x - \frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = -18 - \frac{12}{2} + 9 + \frac{3}{2} = -9 - \frac{9}{2} = -\frac{27}{2}$$

Questão 18

a)

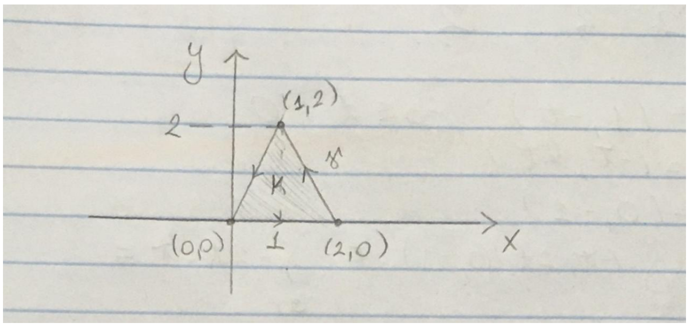

Figura 19: Região K

$$P = x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$Q = 4x + y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 4$$

Reta que liga (1,2) à (0,0):

$$y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

Reta que liga (2,0) à (1,2):

$$y - 0 = -2(x-2) \Rightarrow x = 2 - \frac{y}{2}$$

Além disso:

$$0 \leq y \leq 2$$

Pelo Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \int_{-\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}} (4-0) dxdy = 4 \int_0^2 \int_{-\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}} dxdy = 4 \cdot A(K)$$

Onde $A(K)$ é a área do triângulo. Assim:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 8$$

b)

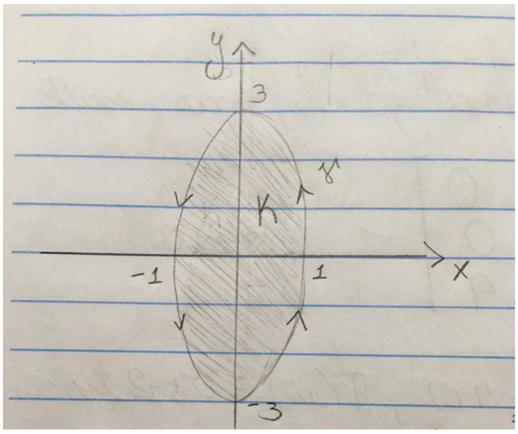

Figura 20: Região K.

$$P = lnx - 2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2$$

$$Q = 2x + e^y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

Como já feito anteriormente, podemos passar para coordenadas polares, já que a regiãoé uma elipse. Assim:

$$x = rcos\theta \quad y = 3rsen\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le r \le 1$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - (-2))3rdr\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 12rdr\theta = 2\pi[12\frac{r^2}{2}]_0^1 = 12\pi$$

c)

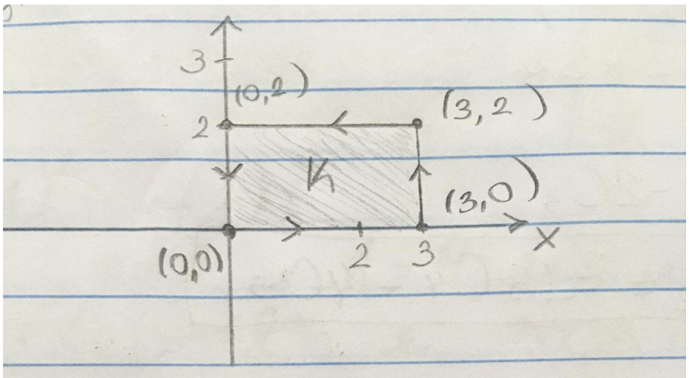

Figura 21: Região K.

$$P = y^2 + \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q = lny - 4x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -4$$

A região K pode ser descrita como:

$$0 \le x \le 3 \quad e \quad 0 \le y \le 2$$

Assim

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \int_0^3 (-4 - 2y)dxdy = \int_0^2 [-4x - 2yx]_{x=0}^{x=3} dy = \int -0^2(-12 - 6y)dy =$$

$$= [-12y - 3y^2]_0^2 = -24 - 12 = -36$$

d)

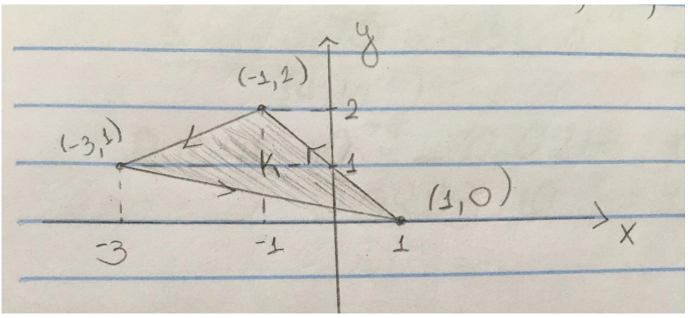

Figura 22: Região K

$$P = e^x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$Q = e^y + 1 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Note, que, pelo T. Green:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \int\int_K 0 dxdy = 0$$

Questão 10

a)

$$P = 0$$

$$Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Pelo T. Green:

$$\int_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \int\int_K 1 dxdy = A(K)$$

b)

$$P = -y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$Q = 0$$

Pelo T. Green:

$$\int_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \int\int_K (0 - (-1)) dxdy = \int\int_K dxdy = A(K)$$

c)

$$P = -y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Pelo T. Green:

$$\int_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int\int_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \frac{1}{2} \int\int_K (1 - (-1)) dxdy = \frac{1}{2} 2 \int\int_K dxdy = A(K)$$

Questão 19

De início, temos a seguinte região K:

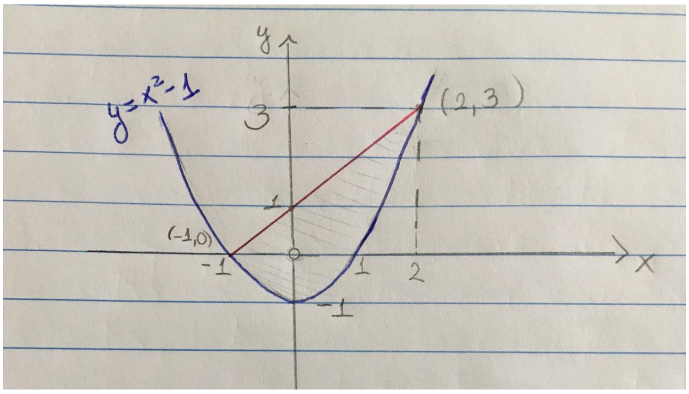

Figura 23: Região K.

Mas note que **não podemos aplicar o Teorema de Green** a essa região, porque ela contém um ponto (0,0) que não pertence ao domínio de nenhuma das funções dadas. Entretanto, se ainda quisermos aplicar o Teorema, precisamos de uma segunda curva para isolar a singularidade do nosso ponto (0,0). Tomemos, por exemplo, uma circunferência de centro (0,0) e raio $= \frac{1}{2}$. Temos então:

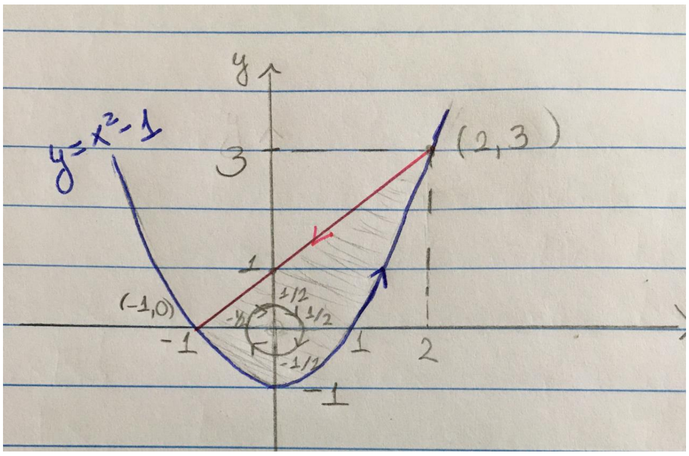

Figura 24: Nova região K.

Agora podemos aplicar o Teorema de Green à região original menos a região compreendida pela circunferência. Note que isso é válido porque agora a fronteira da nossa região é composta pelas curvas γ (parábola + segmento de reta) e α (circunferência de raio 1/2 e centro (0,0)). Assim, ficamos com a seguinte equação:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_{K} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

onde K é a região hachurada na figura 24 e $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é justamente o que é pedido pelo problema.

Para a função $F_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$, temos:

$$P = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Note então que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - (-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}) = 0$$

Assim, ficamos com:

$$\int_{\gamma} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = 0$$

E, portanto:

$$\int_{\gamma} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\alpha} \vec{F_1} \cdot d\vec{r}$$

(0bs: é bem mais fácil calcular a integral de linha sobre uma circunferência do que sobre uma curva que é uma parábola + uma reta).

Assim, basta realizarmos a integral de linha ao longo de α, onde α é uma circunferência de centro (0,0), raio 1/2 e percorrida no sentido horário para respeitar a orientação positiva pedida no Teorema de Green.

$$\alpha(t) = (\frac{1}{2}sent, \frac{1}{2}cost) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (\frac{1}{2}cost, -\frac{1}{2}sent)$$

$$F_1(\alpha(t)) = \left(\frac{(sent)/2}{((sent)/2)^2 + ((cost)/2)^2}, \frac{(cost)/2}{((sent)/2)^2 + ((cost)/2)^2} \right) = (2sent, 2cost)$$

Assim:

$$\int_\alpha \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2sent, 2cost) \cdot (\frac{1}{2}cost, -\frac{1}{2}sent)dt = \int_0^{2\pi} (sentcost - costsent)dt = 0$$

Portanto:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = 0$$

Agora fazendo para o campo $F_2 = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, temos:

$$P = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q = -\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Note então que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

E, do Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = 0$$

Isto é:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\int_\alpha \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$$

Novamente, basta fazermos a integral de linha da função F_2 ao longo da curva α:

$$\alpha(t) = (\frac{1}{2}sent, \frac{1}{2}cost) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (\frac{1}{2}cost, -\frac{1}{2}sent)$$

$$F_2(\alpha(t)) = \left(\frac{(cost)/2}{((sent)/2)^2 + ((cost)/2)^2}, -\frac{(sent)/2}{((sent)/2)^2 + ((cost)/2)^2} \right) = (2cost, -2sent)$$

Assim:

$$\int_\alpha \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2cost, -2sent) \cdot (\frac{1}{2}cost, -\frac{1}{2}sent)dt = \int_0^{2\pi} (cos^2t + sen^2t)dt = \int_0^{2\pi} 1dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Dessa forma, temos:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\int_\alpha \vec{F_2} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -2\pi$$