MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

MAP2320


Piccolo
Flute
Oboe
Bass Oboe
Clarinet
Bass Clarinet
Bassoon
Contra Bass Clarinet

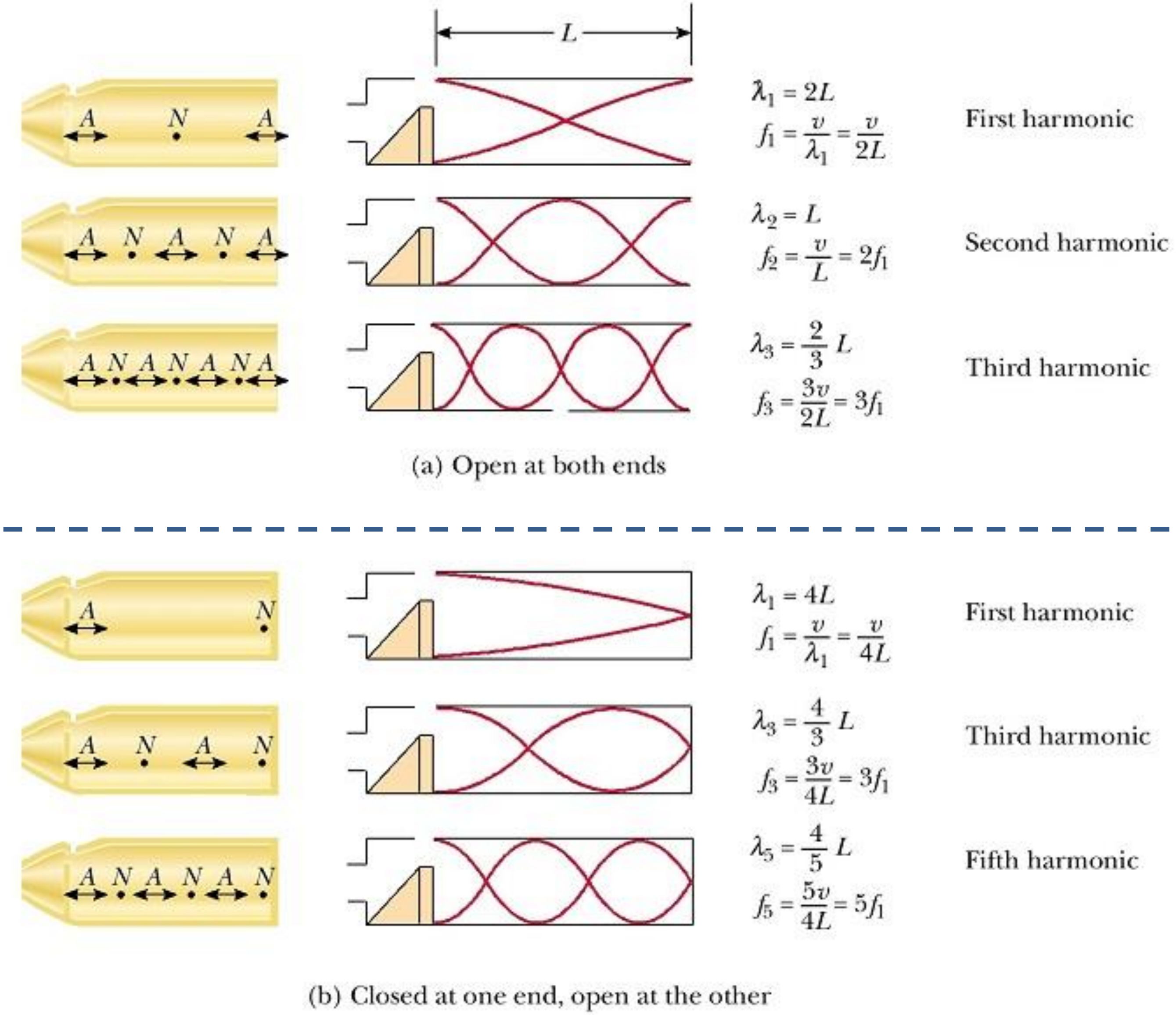


Figure 18.14 Motion of air molecules in standing longitudinal waves in a pipe, along with schematic representations of the waves. The graphs represent the displacement amplitudes, not the pressure amplitudes. (a) In a pipe open at both ends, the harmonic series created consists of all integer multiples of the fundamental frequency: $f_1, 2f_1, 3f_1, \ldots$. (b) In a pipe closed at one end and open at the other, the harmonic series created consists of only odd-integer multiples of the fundamental frequency: $f_1, 3f_1, 5f_1, \ldots$.

Fixed and Free End Springs

https://youtu.be/ZxIlyptT1FY

Boundary Conditions on a String

https://youtu.be/1GyiHMj67JE

Boundary Conditions on a String II

https://youtu.be/lisLZtm-v7w

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

4 Equação da Onda Unidimensional . . . **330**
4.1 Corda Elástica Presa nas Extremidades . . . 330
4.1.1 Com Velocidade Inicial Nula . . . 331
4.1.2 Com Deslocamento Inicial Nulo . . . 345
4.1.3 Caso Geral . . . 354
Exercícios . . . 360
4.2 Corda Elástica Solta em uma Extremidade . . . 363
4.2.1 Com Velocidade Inicial Nula . . . 364
4.2.2 Com Deslocamento Inicial Nulo . . . 374
4.2.3 Caso Geral . . . 382
Exercícios . . . 386
4.3 Corda Elástica Infinita . . . 389
4.3.1 Solução Geral . . . 389
4.3.2 Problema de Valor Inicial . . . 390
Exercícios . . . 392
4.4 Respostas dos Exercícios . . . 394

4.2 Corda Elástica Solta em uma Extremidade

Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical. Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, vamos resolver o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com deslocamento inicial nulo ($f(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

com a solução do problema com velocidade inicial nula ($g(x) = 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

4.2.1 Com Velocidade Inicial Nula

Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto de uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula, ou seja, vamos resolver (PVIF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Dividindo-se por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X'(L) = 0 & (4.15) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0,\ T'(0) = 0 & (4.16) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t)$. A condição $T'(0) = 0$, decorre do fato de que a velocidade inicial é nula, ou seja,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam, como foi mostrado na Subseção 3.3.1 página 302 para o caso da equação do calor, que (4.15) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.15) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.16) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T'(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.17}$$

tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x) T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}, \tag{4.18}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Então para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $f(x)$ de período L. Entretanto, estendendo f ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ f(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{4.20}$$

Assim, se a função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{4.21}$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \dfrac{4L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

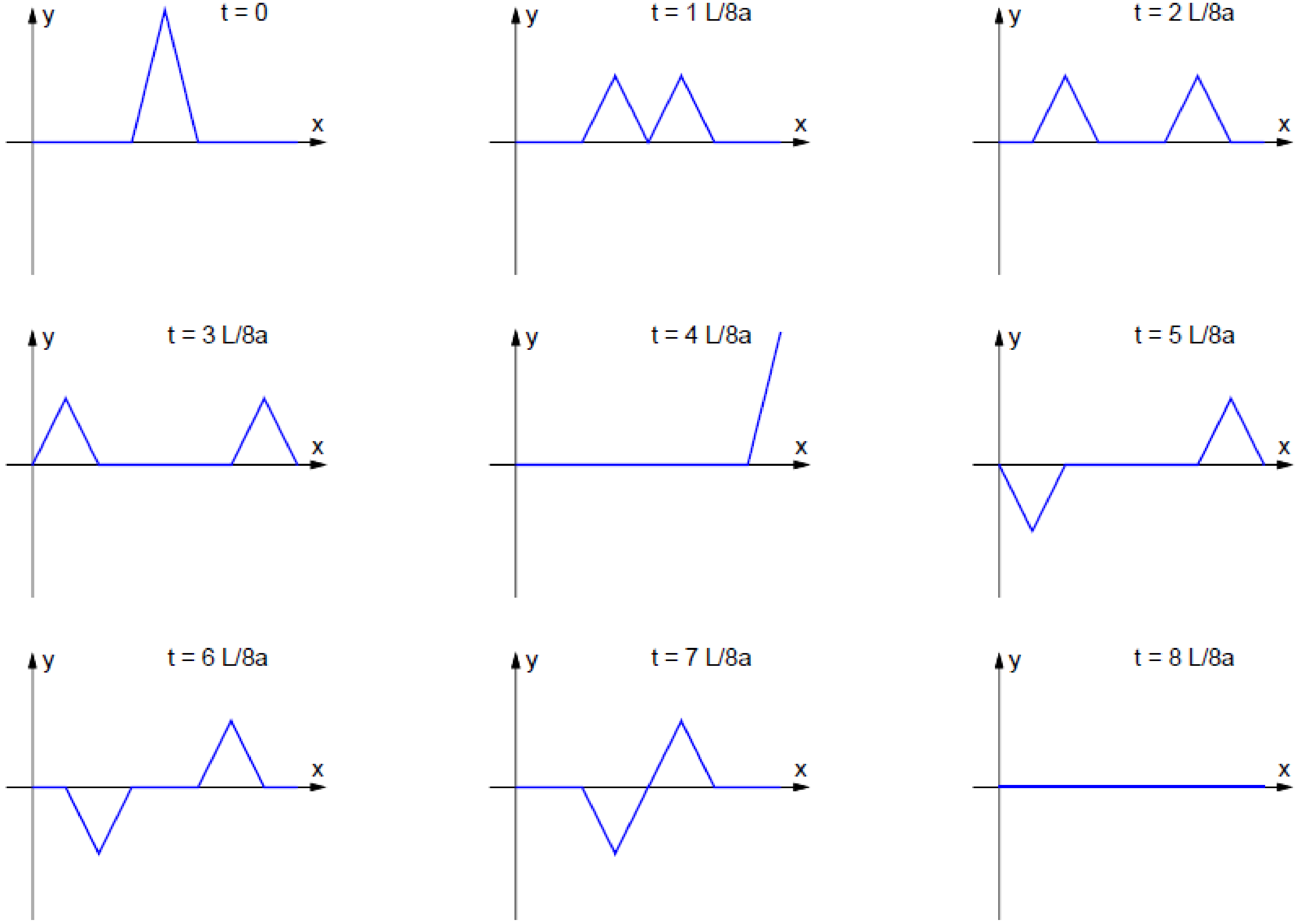


Figura 4.8 – Solução, $u(x,t)$, do problema da corda presa na extremidade esquerda com velocidade inicial nula, para t variando entre 0 e $T/4$.

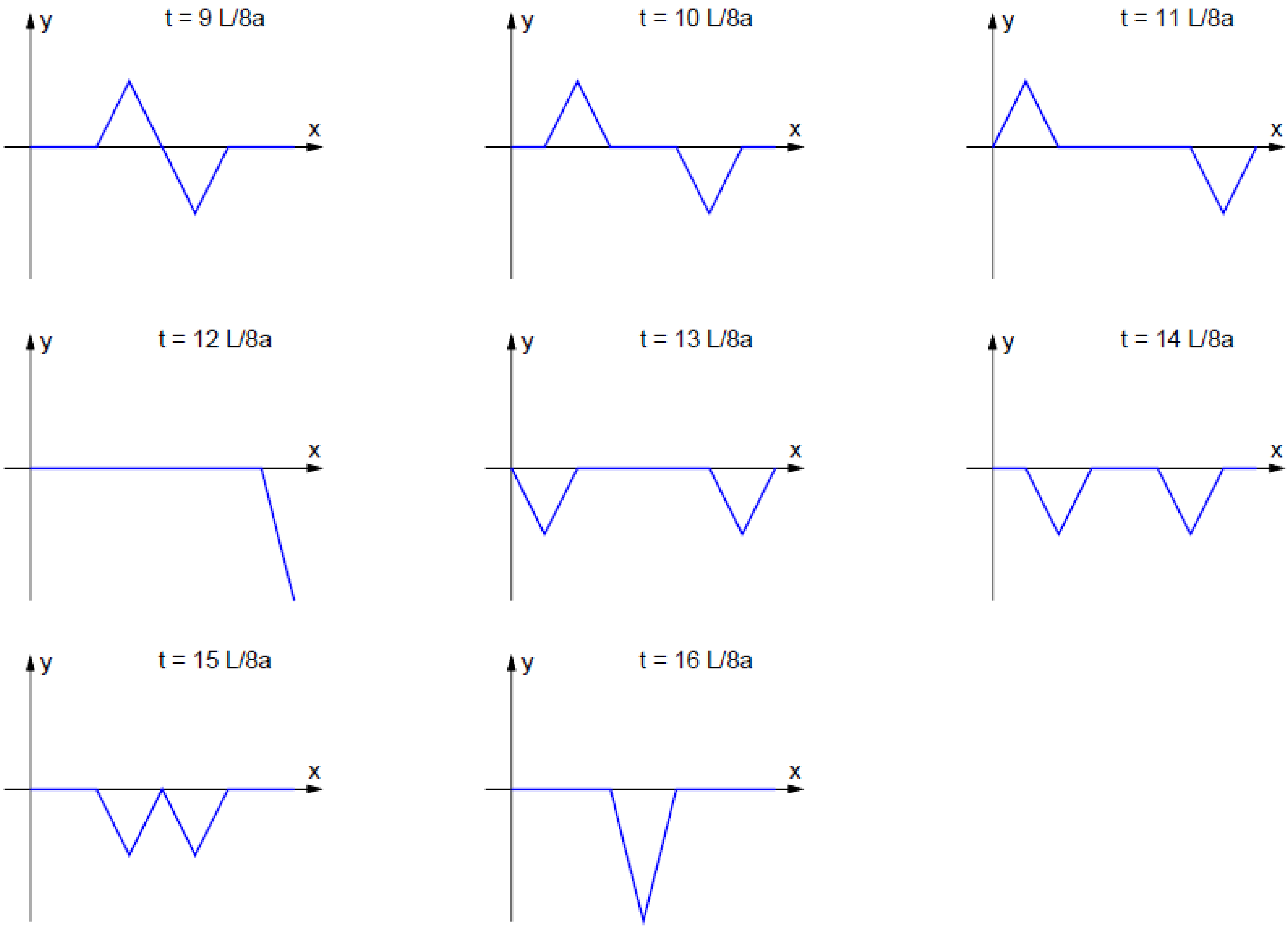


Figura 4.9 – Solução, $u(x,t)$, do problema da corda presa na extremidade esquerda com velocidade inicial nula, para t variando entre $T/4$ e $T/2$.

Exemplo 4.4. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa somente na extremidade esquerda, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0. \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que c_{2n+1} são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= 4\left(b_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}},80) - 20 b_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}},80)\right) \\ &= 4\cdot\frac{80}{(2n+1)^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}_{\frac{(2n+1)\pi}{4}} - 20\cdot 4\cdot \frac{-1}{(2n+1)\pi}\cos s\Big|^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}_{\frac{(2n+1)\pi}{4}} \\ &= \frac{320}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - \frac{80}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi t}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

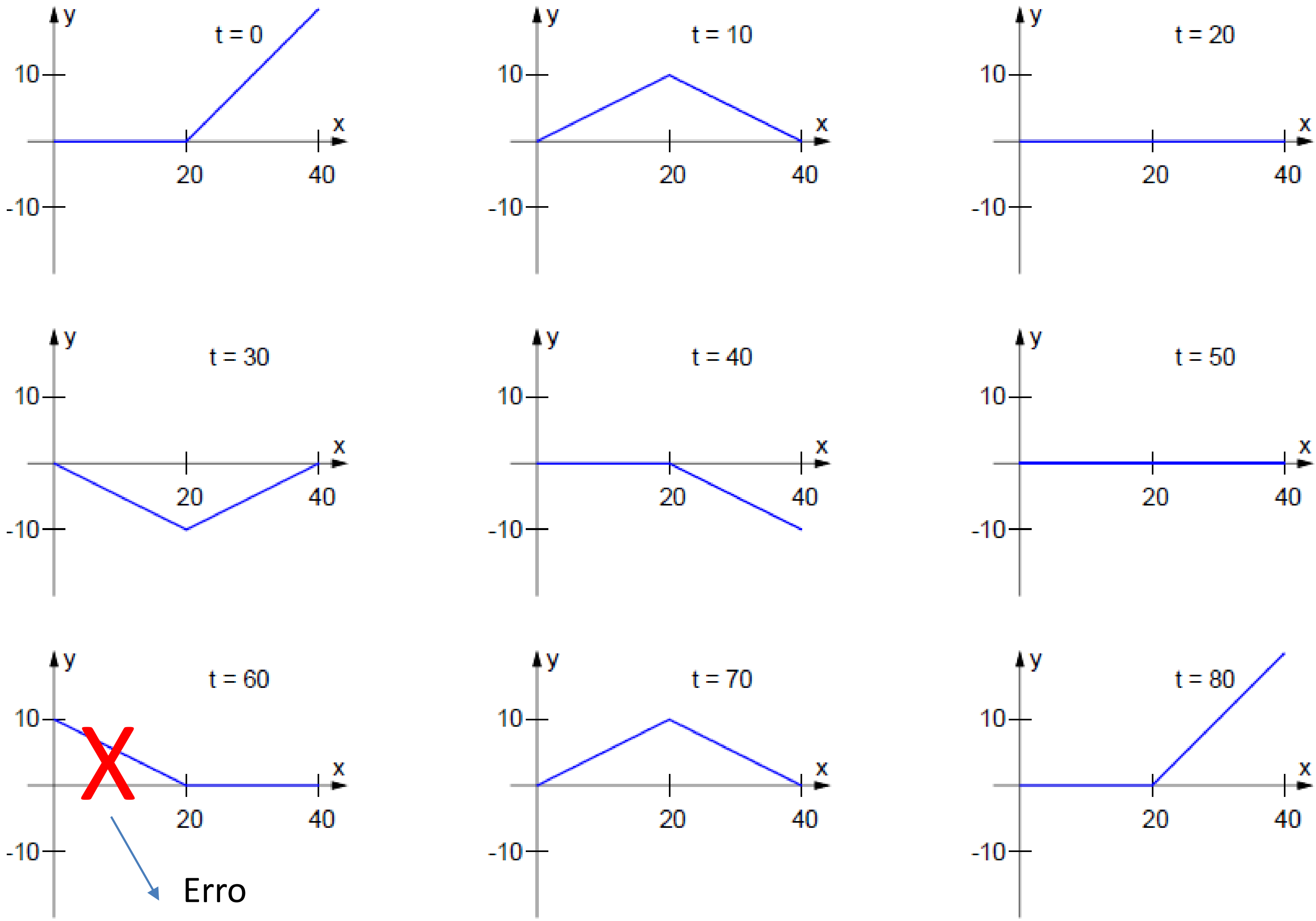
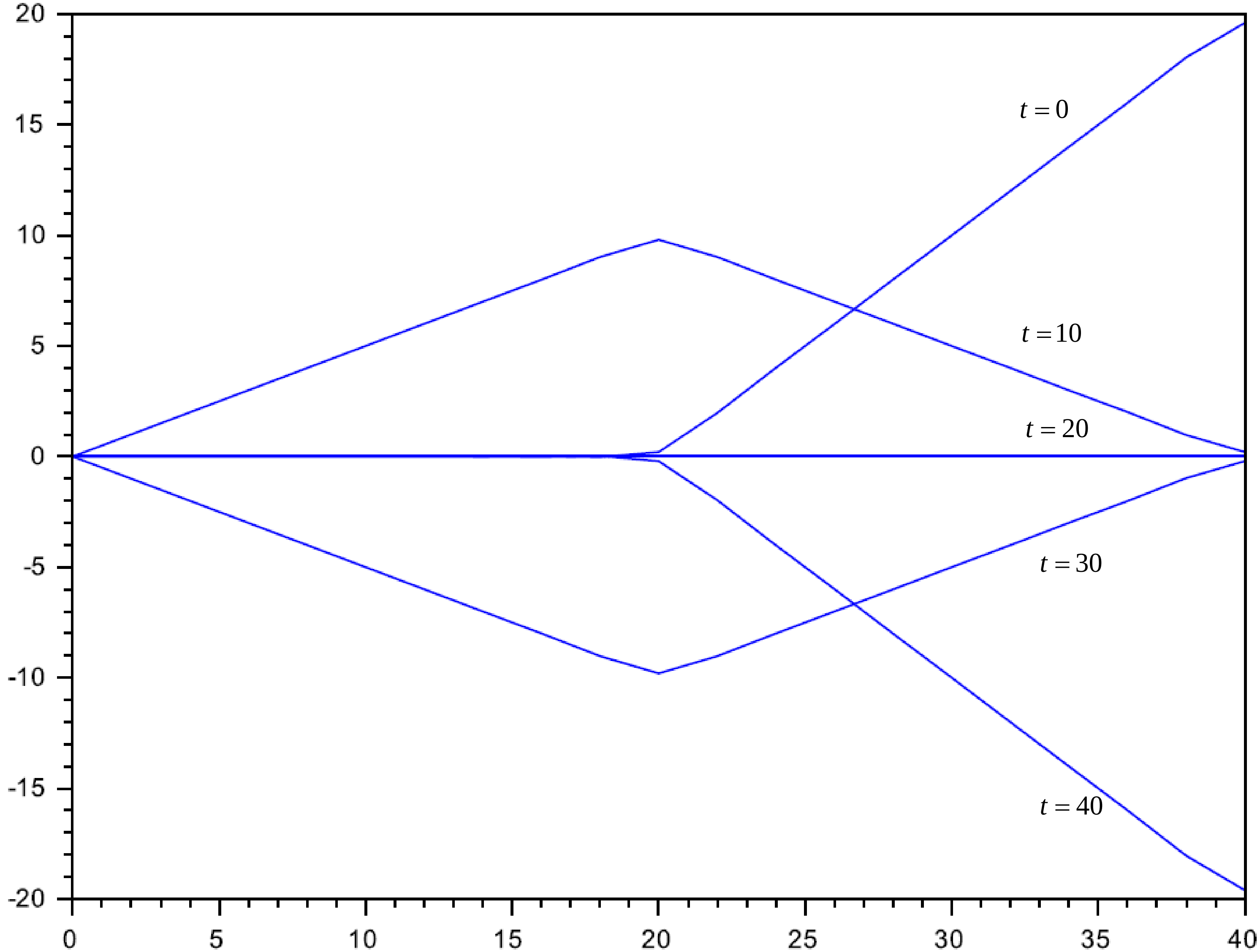


Figura 4.10 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.4.

```
//Exemplo 4.4
m=20; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=20
t=40
a=2
u = zeros(m+1)
for k = 0:nk
    n = 2*k+1
    cn= 8*L*(sin(n*%pi/2)-sin(n*%pi/4))/(n^2*%pi^2)-2*L*cos(n*%pi/2)/(n*%pi)
    u = u + cn*sin(n*%pi*x/(2*L))*cos(n*a*%pi*t/(2*L))
end
plot(x,u)
```


$t=0$
$t=10$
$t=20$
$t=30$
$t=40$
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
5
10
15
20
25
30
35
40

4.2.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

Vamos considerar uma corda elástica de comprimento L presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical. Vamos determinar o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial da corda é nulo e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X'(L) = 0, & (4.23) \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(0) = 0. & (4.24) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ e $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t)$. A condição $T(0) = 0$, decorre do fato de que a posição inicial é nula, ou seja,

$$0 = u(x,0) = X(x)T(0).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam, como no caso do exercício sobre a equação do calor resolvido na página 314, que (4.23) tem solução não identicamente nula somente se $\lambda < 0$, mais que isso λ tem que ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja, a equação o problema de valores de fronteira (4.23) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (4.24) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0; \quad u(x,0) = 0, \; 0 < x < L \end{cases} \tag{4.25}$$

tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x) T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L} \tag{4.26}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} u_{2n+1}(x,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Então para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que impor a condição

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \frac{a(2n+1)\pi}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta não é a série de Fourier de senos de $g(x)$ de período L. Entretanto, estendendo g ao intervalo $[0, 2L]$ de forma que ela seja simétrica em relação a reta $x = L$, ou seja,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ g(2L - x) & \text{se } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

então

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \frac{a(2n+1)\pi}{2L} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}. \tag{4.28}$$

Assim, se a função $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{a(2n+1)\pi}{2L} c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}\, dx. \tag{4.29}$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \operatorname{sen} \frac{a(2n+1)\pi t}{2L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \dfrac{4L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

Exemplo 4.5. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, com coeficiente $a = 2$, presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x/10 - 2, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que $\frac{(2n+1)\pi}{40} c_{2n+1}$ são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.4 na página 371 divididos por 10, ou seja,

$$\frac{(2n+1)\pi}{40} c_{2n+1} = \frac{32}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - \frac{8}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{320}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)}\right] \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{80}.$$

Verifique a última expressão ??????????

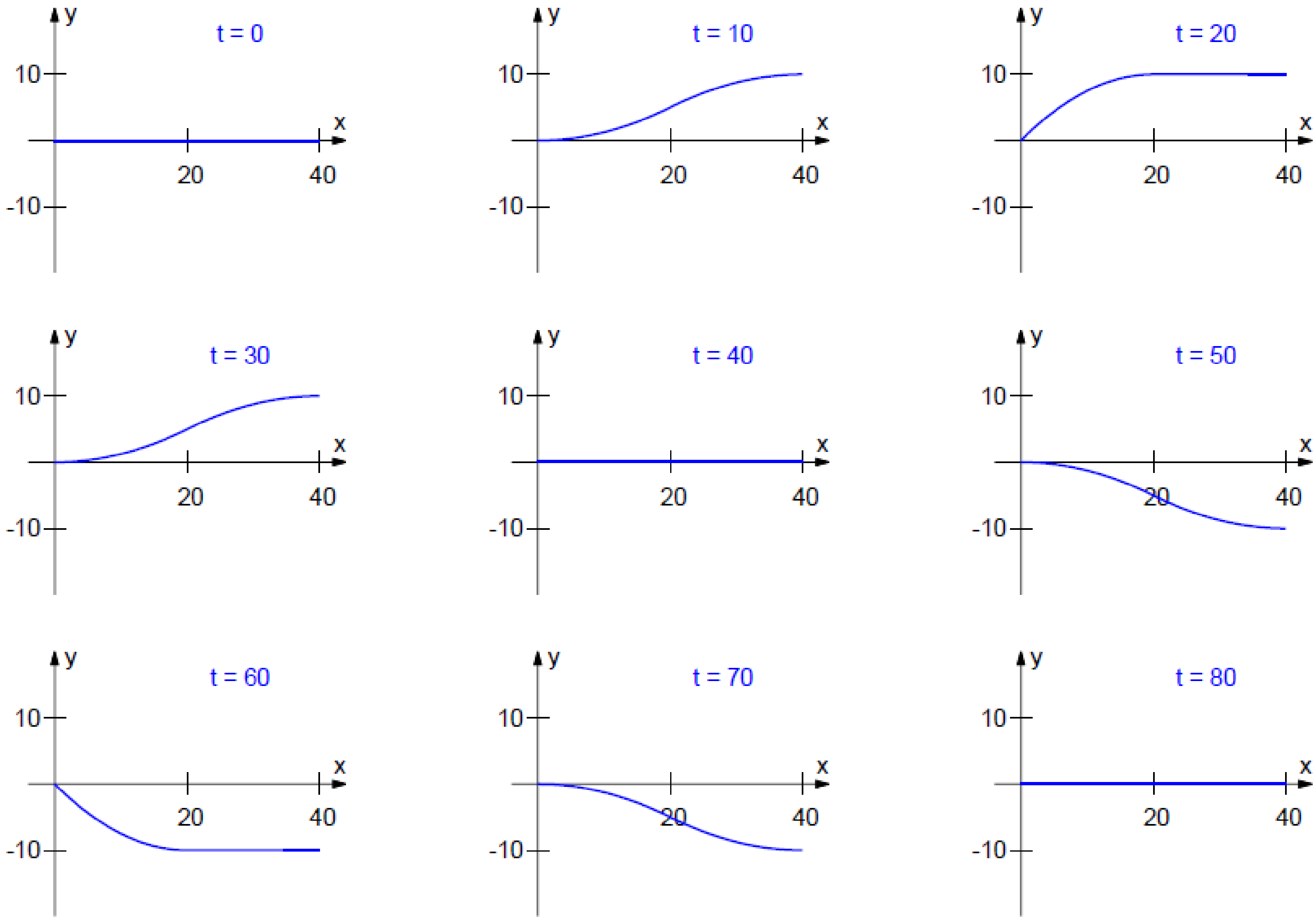
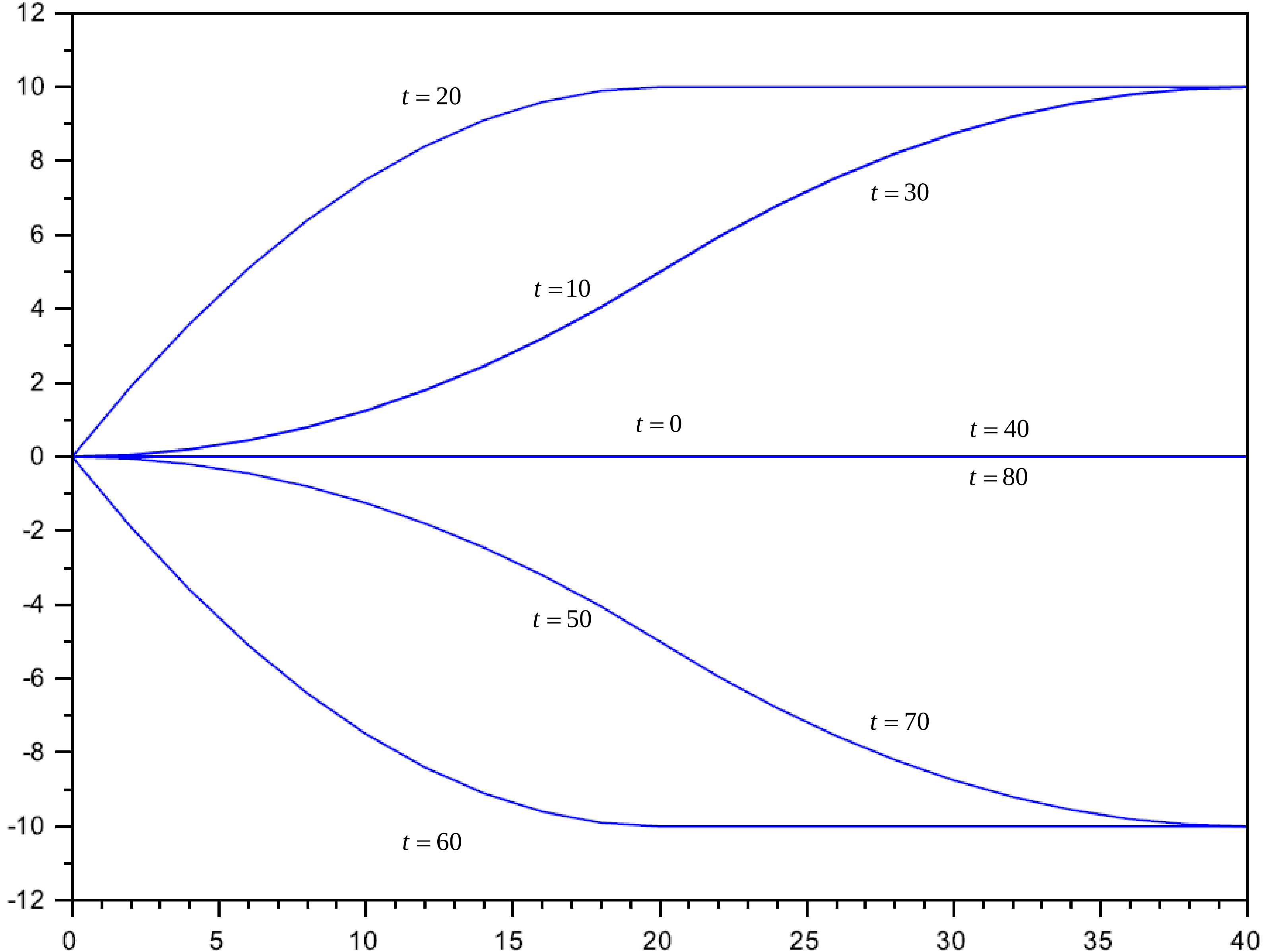


Figura 4.11 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.5.

```
//Exemplo 4.5
m=20; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=20
t=60
a=2
u = zeros(m+1)
for k = 0:nk
    n = 2*k+1
    cn= (16*L^2)/(10*a*n^3*%pi^3)*(sin(n*%pi/2)-sin(n*%pi/4))-(16*L)/(a*n^2*%pi^2)*cos(n*%pi/2)
    u = u + cn*sin(n*%pi*x/(2*L))*sin(n*a*%pi*t/(2*L))
end
plot(x,u)
```


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0
5
10
15
20
25
30
35
40
$t = 20$
$t = 30$
$t = 10$
$t = 0$
$t = 40$
$t = 80$
$t = 50$
$t = 70$
$t = 60$

4.2.3 Caso Geral

Voltando ao caso geral em que o deslocamento vertical em função da posição e do tempo, $u(x,t)$, de cada ponto da corda elástica, sabendo-se que o deslocamento inicial de cada ponto da corda é dado por $f(x)$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada por $g(x)$, ou seja, resolva o PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

Exemplo 4.6. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, com coeficiente $a = 2$, presa somente na extremidade esquerda, enquanto que na extremidade direita é colocado um anel que corre sem atrito em volta de uma barra vertical, com deslocamento inicial dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

e com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ x/10 - 2, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}$$

em que c_{2n+1} são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.4 na página 371 e $\frac{(2n+1)\pi}{40} d_{2n+1}$ são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $g(x)$ do Exemplo 4.5 na página 378, ou seja,

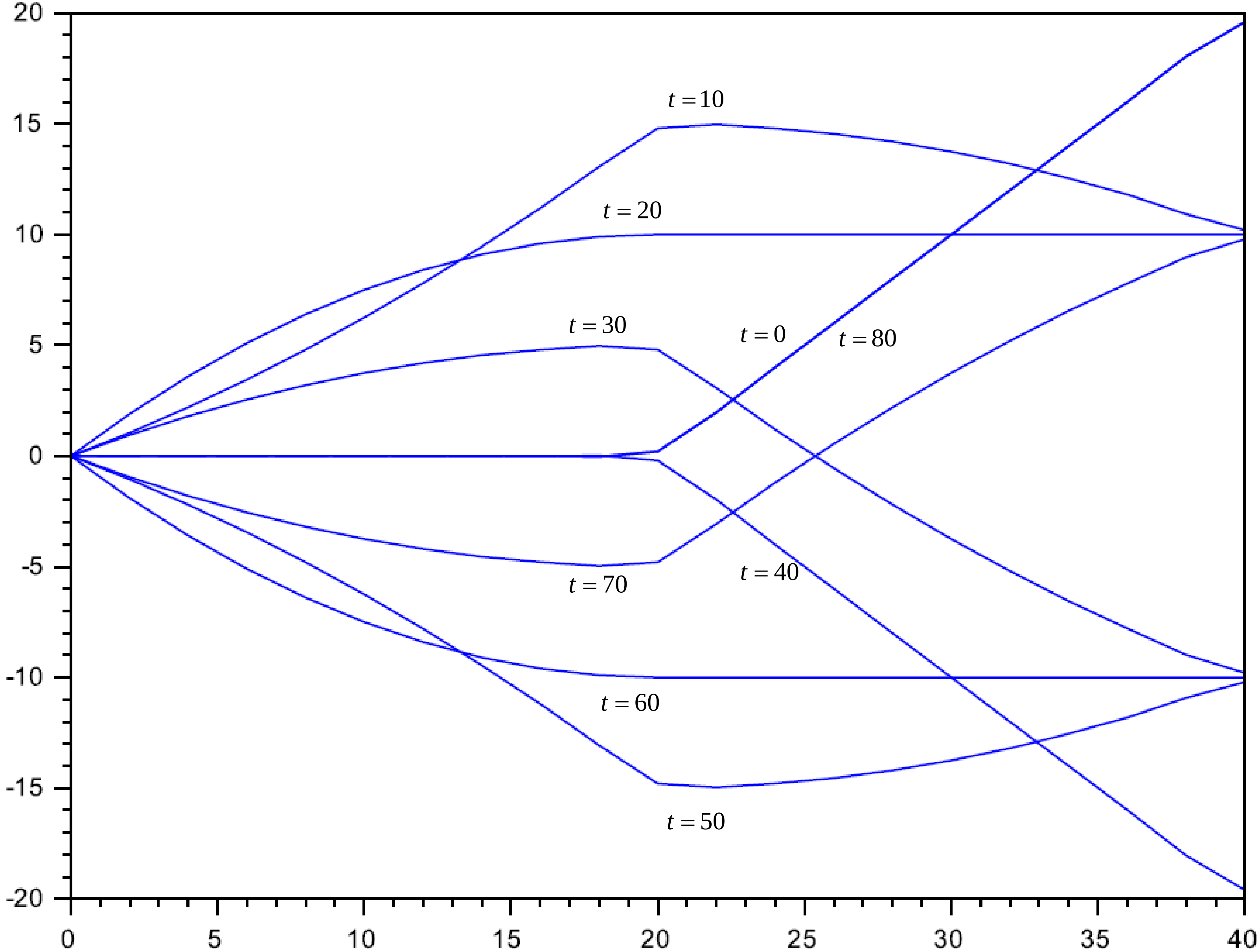
$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{320}{(2n+1)^2\pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) - \frac{80}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \\ \frac{(2n+1)\pi}{40} d_{2n+1} &= \frac{32}{(2n+1)^2\pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right) - \frac{8}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{80}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4\left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} + \\ &+ \frac{320}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4\left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{4} \right)}{(2n+1)^2\pi} - \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}{(2n+1)} \right] \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80}. \end{aligned}$$

Verifique a última expressão ??????????

```
//Exemplo 4.6
m=20; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=20
t=80
a=2
u = zeros(m+1)
uf = u
ug = u
for k = 0:nk
    n = 2*k+1
    cf= 8*L*(sin(n*%pi/2)-sin(n*%pi/4))/(n^2*%pi^2)-2*L*cos(n*%pi/2)/(n*%pi)
    uf = uf + cf*sin(n*%pi*x/(2*L))*cos(n*a*%pi*t/(2*L))
    cg= (16*L^2)/(10*a*n^3*%pi^3)*(sin(n*%pi/2)-sin(n*%pi/4))-(16*L)/(a*n^2*%pi^2)*cos(n*%pi/2)
    ug = ug + cg*sin(n*%pi*x/(2*L))*sin(n*a*%pi*t/(2*L))
    u = uf + ug
end
plot(x,u)
```


$t=10$
$t=20$
$t=30$
$t=0$
$t=80$
$t=70$
$t=40$
$t=60$
$t=50$
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
5
10
15
20
25
30
35
40

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- **Equação da onda (hiperbólica)**