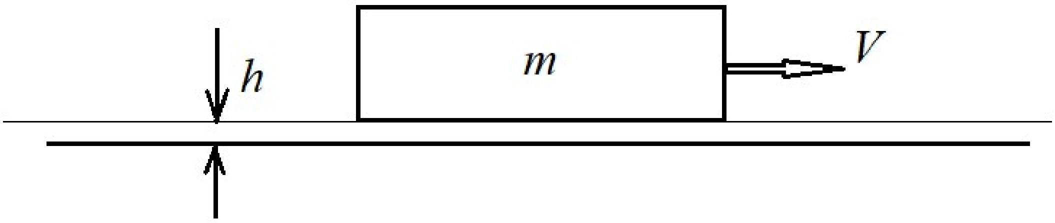
Valor - 2 pontos: Um objeto de massa m = 1000 kg se desloca flutuando sobre um plano coberto por um filme de fluido de viscosidade μ = 0,1 kg/(m.s) que tem uma espessura h=1mm. A superfície de contato entre o objeto e o filme de fluido tem área A= 3 m^2. Se a única força agindo sobre o objeto for o atrito viscoso, e se em um instante t = 0 o objeto tiver uma velocidade inicial V_o, qual a distância percorrida pelo objeto até a sua velocidade cair até 1/10 da velocidade inicial?



Dados: a) V_o= 10 m/s b) V_o= 5 m/s c) V_o= 1 m/s d) V_o= 20 m/s e) V_o= 40 m/s

Solução

Se a única força agindo no objeto for o atrito viscoso:

$$-\mu \frac{V}{h} A = m \frac{dV}{dt}$$

Isso resulta:

$$\frac{1}{V} dV = -\frac{\mu A}{m h} dt$$

Ou seja:

$$\ln V = -\frac{\mu A}{m h} t + C$$

Como para t = 0 temos $V = V_o$, $C = \ln V_o$. Assim:

$$\boxed{\ln \frac{V}{V_o} = -\frac{\mu A}{m h} t = -K t}$$

Que resulta:

$$\boxed{V = V_o e^{-K t}} \quad \text{com} \quad K = \frac{\mu A}{m h}$$

Mas podemos então dizer que:

$$\frac{dx}{dt} = V_o \, e^{-Kt}$$

Integrando:

$$x = -\frac{V_o}{K} e^{-Kt} + C_2$$

Se considerarmos que para $t = 0$ temos $x = 0$:

$$C_2 = \frac{V_o}{K}$$

E teremos:

$$\boxed{x = \frac{V_o}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right) = \frac{V_o}{K}\left(1 - \frac{V}{V_o}\right)}$$

Para os dados do problema:

$$K = \frac{0{,}1 \times 3}{1000 \times 0{,}001} = 0{,}3\,\mathrm{s}^{-1}$$

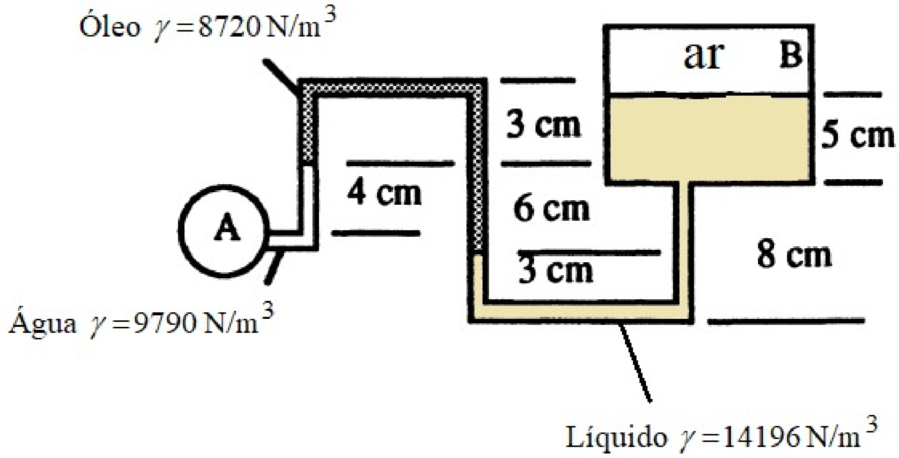
$$\ln \frac{1}{10} = -0{,}3t \;\Rightarrow\; t = 7{,}68\,\mathrm{s}$$

$$x = \frac{V_o}{0{,}3}\left(1 - e^{-0{,}3 \times 7{,}68}\right) = 3V_o$$

Dos dados do problema:

a) $x = 30$ m b) $x = 15$ m c) $x = 3$ m d) $x = 60$ m e) $x = 120$ m

Valor – 2 pontos: Para uma dada pressão p_A da água no ponto A, calcula a pressão p_B do ar.



Dados: a) 172400 Pa b) 180000 Pa c) 130000 Pa d) 120000 Pa e) 150000 Pa

Solução

$p_A - 9790 \times 0{,}04 + 8720 \times 0{,}06 - 14196 \times 0{,}10 = p_B$

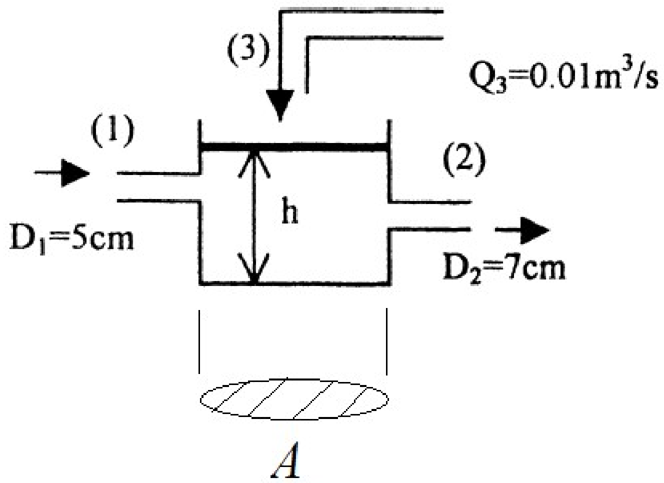
Logo:

$\boxed{p_B = p_A - 1288}$

Solução:

a) 171112 Pa b) 178712 Pa c) 128712 Pa d) 118712 Pa e) 148712 Pa

Valor – 2 pontos: Um tanque aberto de formato cilíndrico contendo água tem uma superfície livre móvel de altura $h(t)$. A área superficial A do tanque tem 0,2 m^2. Se $V_1 = 3\,\text{m/s}$, $Q_3 = 0{,}01\,\text{m}^3\text{/s}$ e temos uma dada velocidade V_2, calcule a velocidade da superfície livre $\dfrac{dh}{dt}$.



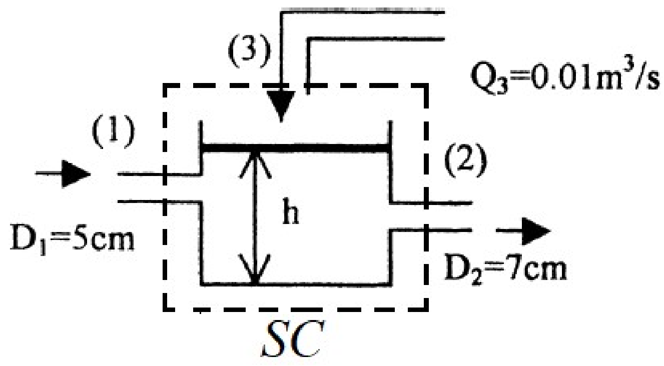
Dados: a) $V_2 = 3\,\text{m/s}$ b) $V_2 = 2\,\text{m/s}$ c) $V_2 = 5\,\text{m/s}$ d) $V_2 = 6\text{m/s}$ e) $V_2 = 2{,}5\,\text{m/s}$

Solução

Da equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, dS = 0$$

Considerando escoamento incompressível e imaginando um volume de controle ao redor do tanque, a variação temporal de volume de água no tanque vai ser dada pela soma líquida das vazões através da *SC*:



$$\frac{dh}{dt}A + Q_2 - Q_1 - Q_3 = 0$$

Assim:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 + Q_3 - Q_2}{A} = \frac{V_1 \dfrac{\pi D_1{}^2}{4} + Q_3 - V_2 \dfrac{\pi D_2{}^2}{4}}{A}$$

Substituindo os dados numéricos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3 \times \dfrac{\pi \times 0{,}05^2}{4} + 0{,}01 - V_2 \dfrac{\pi \times 0{,}07^2}{4}}{0{,}2}$$

Isso resulta:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}0159 - V_2 \times 0{,}00385}{0{,}2}$$

Solução:

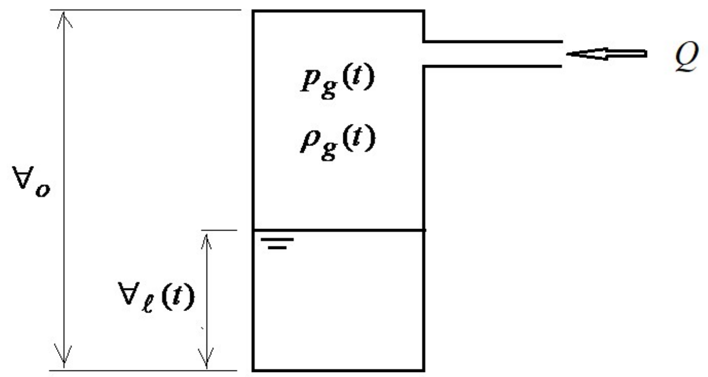
a) $\dfrac{dh}{dt} = 0{,}0218\,\text{m/s}$ b) $\dfrac{dh}{dt} = 0{,}041\,\text{m/s}$ c) $\dfrac{dh}{dt} = -\,0{,}0168\,\text{m/s}$ d) $\dfrac{dh}{dt} = -\,0{,}036\,\text{m/s}$

e) $\dfrac{dh}{dt} = 0{,}0314\,\text{m/s}$

Valor – 2 pontos: Um tanque de volume $\forall_o$ está cheio de ar com massa específica equivalente ao seu valor na atmosfera ρ_o. Em um instante $t=0$ uma bomba começa a encher o tanque com uma vazão Q de uma mistura composta meio a meio de água e ar, sendo ρ_ℓ a massa específica da água e ρ_o a massa específica do ar. Dentro do tanque, a água cai no fundo ocupando um volume $\forall_\ell(t)$ que aumenta com o tempo. O ar fica na parte superior, ocupando o resto do volume, e sua massa específica $\rho_g(t)$ vai variando com o tempo. A pressão do ar $p_g(t)$ no tanque é dada por:

$p_g(t) = p_o \dfrac{\rho_g(t)}{\rho_o}$ onde p_o é a pressão atmosférica.

Calcule a relação $\dfrac{p_g(t)}{p_o}$ no instante em que o volume ocupado pela água $\forall_\ell(t)$ é uma dada fração do volume $\forall_o$. Lembre-se que a água é incompressível.



Dados: a) $\dfrac{\forall_\ell(t)}{\forall_o} = \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{\forall_\ell(t)}{\forall_o} = \dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{\forall_\ell(t)}{\forall_o} = \dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{\forall_\ell(t)}{\forall_o} = \dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{\forall_\ell(t)}{\forall_o} = \dfrac{3}{4}$

Solução

Dada a equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \, \vec{\upsilon} . \vec{n} \, dS = 0$$

Aplicando a equação para a água:

$$\frac{d\left[\rho_\ell \forall_\ell(t)\right]}{d t} = \rho_\ell \frac{Q}{2}$$

Isso resulta, lembrando que em $t=0$ não temos água no tanque:

$$\boxed{\forall_{\ell}(t)=\frac{Q}{2}t}$$

Aplicando agora a equação da continuidade para o ar:

$$\frac{d\left\{\rho_g(t)\left[\forall_o-\forall_{\ell}(t)\right]\right\}}{d\,t}=\rho_o\,\frac{Q}{2}$$

Isso resulta:

$$\rho_g(t)\left[\forall_o-\forall_{\ell}(t)\right]-\rho_o\forall_o=\rho_o\,\frac{Q}{2}t$$

Substituindo o resultado para o volume de líquido:

$$\rho_g(t)\left[\forall_o-\forall_{\ell}(t)\right]=\rho_o\forall_o+\rho_o\,\forall_{\ell}(t)$$

Resultando:

$$\rho_g(t)=\rho_o\,\frac{\left[\forall_o+\forall_{\ell}(t)\right]}{\left[\forall_o-\forall_{\ell}(t)\right]}$$

Ou seja:

$$\boxed{\rho_g(t)=\rho_o\,\frac{\left[1+\forall_{\ell}(t)/\forall_o\right]}{\left[1-\forall_{\ell}(t)/\forall_o\right]}}$$

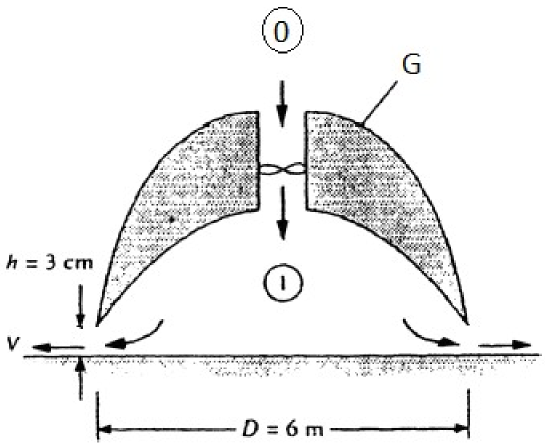
Portanto:

$$\boxed{\frac{p_g(t)}{p_o}=\frac{\rho_g(t)}{\rho_o}=\frac{\left[1+\forall_{\ell}(t)/\forall_o\right]}{\left[1-\forall_{\ell}(t)/\forall_o\right]}}$$

Assim, resulta:

a) $\dfrac{p_g(t)}{p_o}=3$ b) $\dfrac{p_g(t)}{p_o}=2$ c) $\dfrac{p_g(t)}{p_o}=4$ d) $\dfrac{p_g(t)}{p_o}=5$ e) $\dfrac{p_g(t)}{p_o}=7$

Valor – 2 pontos: Um veículo de peso G move-se sobre um colchão de ar. O veículo tem uma base circular de diâmetro $D=6\,m$. Um ventilador retira ar da atmosfera em (0), e transporta o ar até uma câmara de grandes dimensões em (1), onde o ar fica praticamente em estagnação. Pela ação da pressão p_1 em (1) o veículo é erguido em relação ao solo, gerando uma abertura anular de altura $h=3\,cm$, por onde o ar deixa o veículo num jato anular de velocidade V. Qual a vazão Q do ventilador? Lembre-se que em problemas envolvendo gases a cota em geral é desprezada na equação de Bernoulli. Despreze perdas de carga. A massa específica do ar é $\rho=1{,}205\,\mathrm{kg/m^3}$.



Dados: a) $G=50\,\mathrm{kN}$ b) $G=30\,\mathrm{kN}$ c) $G=70\,\mathrm{kN}$ d) $G=20\,\mathrm{kN}$ e) $G=90\,\mathrm{kN}$

Solução

A pressão p_1 tem que sustentar o peso G do veículo:

$$(p_1-p_0)\frac{\pi D^2}{4}=G$$

Como a pressão p_0 é atmosférica, a pressão p_1 (efetiva) resulta:

$$p_1=\frac{4G}{\pi D^2}$$

Aplicando a equação da energia entre (1) e a saída de ar na folga e lembrando que em problemas envolvendo gases as cotas usualmente são desprezadas:

$$\underbrace{\frac{V_1^2}{2g}}_{0}+\frac{p_1}{\gamma}=\frac{V^2}{2g}+\underbrace{\frac{p_{atm}}{\gamma}}_{0}$$

Logo:

$$V=\sqrt{\frac{2\,p_1}{\rho}}=\sqrt{\frac{8G}{\rho\pi D^2}}$$

A vazão será dada pelo produto dessa velocidade pela área anular de saída:

$$Q=V\,\pi\,D\,h=\sqrt{\frac{8G}{\rho\pi D^2}}\pi\,D\,h=\sqrt{\frac{8\pi\,G\,h^2}{\rho}}$$

Isso resulta:

$$Q=\sqrt{\frac{8\,\pi\,G\times 0{,}03^2}{1{,}205}}=0{,}137\sqrt{G}$$

Resultados:

a) $Q=30{,}6\,\mathrm{m^3/s}$ b) $Q=23{,}7\,\mathrm{m^3/s}$ c) $Q=36{,}2\,\mathrm{m^3/s}$ d) $Q=19{,}4\,\mathrm{m^3/s}$ e) $Q=41{,}1\,\mathrm{m^3/s}$