Lista 5

Nícolas André da Costa Morazotti

8 de dezembro de 2020

Questão 1

Na figura 1, o segmento horizontal preto na parte de baixo mostra o perfil de uma pequena abertura retangular com largura $2a$ e altura $2h$. Pela abertura passa luz de comprimento de onda λ. A distância L é muito maior do que a distância a, que é algumas vezes maior que λ. Qual é o menor ângulo θ para o qual os raios representados pelos segmentos vermelhos interferem destrutivamente? Um dos raios passa pela extremidade esquerda da abertura, e o outro passa pelo centro. *Sugestão: Para encontrar a diferença $d - b$, use a lei dos cossenos e desconsidere a^2 em comparação com b^2 ou d^2.*

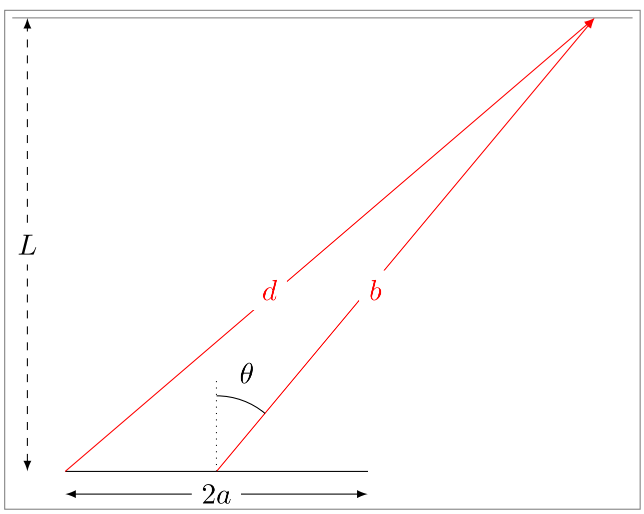


Figura 1: Questões 1 e 2.

Para que os raios representados se interfiram *construtivamente*, não deve haver diferença de fase e portanto a diferença de caminho óptico deve ser

$$d - b = m\lambda, \tag{1}$$

para algum $m \in \mathbb{N}$. Contudo, se tratando de interferência *destrutiva*, deve haver uma diferença de fase de π, ou seja, uma diferença de caminho óptico sendo um inteiro de $\lambda/2$. Para que ocorra tal interferência,

$$d - b = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda. \tag{2}$$

Para encontrar o menor ângulo θ, vamos encontrar a diferença $d-b$ com a lei dos cossenos. Sabemos que o ângulo formado pelo raio vermelho de comprimento b é $\theta+\pi/2$. Com isso em mente,

$$
\begin{aligned}
d^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) && (3)\\
&= a^2+b^2+2ab\sin(\theta). && (4)
\end{aligned}
$$

Com $a \ll b$, $a^2+b^2 \approx b^2$. Então,

$$
d^2 = b^2+2ab\sin(\theta). \tag{5}
$$

A partir da geometria, também podemos b encontrar em função de θ e L:

$$
b = \frac{L}{\cos\theta}.
$$

Com isso, d se torna

$$
\begin{aligned}
d^2 &= \frac{L^2}{\cos^2(\theta)}+2aL\tan(\theta) && (6)\\
&= \frac{L^2}{\cos^2(\theta)}\left[1+2\frac{a}{L}\sin(\theta)\cos(\theta)\right] && (7)\\
&= \frac{L^2}{\cos^2(\theta)}\left[1+\frac{a}{L}\sin(2\theta)\right] && (8)\\
d &= \frac{L}{\cos(\theta)}\sqrt{1+\frac{a}{L}\sin(2\theta)}. && (9)
\end{aligned}
$$

Podemos expandir a raiz pois $a \ll L$.

$$
d \approx \frac{L}{\cos(\theta)}\left(1+\frac{a}{2L}\sin(2\theta)\right). \tag{10}
$$

Com tal aproximação, a diferença $d-b$ se torna

$$
\begin{aligned}
d-b &= \frac{L}{\cos(\theta)}+\frac{a}{2\cos(\theta)}\sin(2\theta)-\frac{L}{\cos(\theta)} && (11)\\
&= \frac{a}{2\cos(\theta)}2\sin(\theta)\cos(\theta) && (12)\\
&= a\sin(\theta) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda && (13)\\
\sin(\theta) &= \frac{1}{a}\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda. && (14)
\end{aligned}
$$

O menor θ se dá quando $m=0$.

$$
\sin(\theta) = \frac{\lambda}{2a}. \tag{15}
$$

Questão 2

Em classe, derivamos a expressão

$$
I = I_{max}\frac{\sin^2(k_x a)}{(k_x a)^2}\frac{\sin^2(k_y h)}{(k_y h)^2} \tag{16}
$$

para a intensidade de luz num ponto da tela na figura 1. A partir dessa expressão, encontre o menor ângulo θ onde a intensidade se anula. *Sugestão: por definição,* $k_x = (2\pi/\lambda)\sin(\theta)$.

Para que a intensidade se anule, vamos substituir k_x na expressão (16).

$$I = I_{max} \frac{\sin^2\left[\frac{2\pi a}{\lambda}\sin(\theta)\right]}{\left[\frac{2\pi a}{\lambda}\sin(\theta)\right]^2} \frac{\sin^2(k_y h)}{(k_y h)^2}. \tag{17}$$

Ao invés de derivar, vamos tomar um caminho um pouco mais lógico. Veja que $\sin^2(x)$ se anula nos mesmos pontos que $\sin(x)$ se anula; i.e., $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Contudo, x não pode ser nulo já que ele também se encontra no denominador. Então, o primeiro x que anula $\sin^2(x)$ é $x = \pi$. Para que $x = \pi$, $\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta = \pi$, que implica que

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{2a}, \tag{18}$$

como encontrado no exercício 1.

Questão 3

Ao passar pela pupila de um de seus olhos, a luz tem de passar por pequenas frestas formadas pela íris. Imagine que uma dessas frestas tem tamanho de $0.02mm$. A luz é projetada na retina, que está a cerca de $2cm$ da pupila. A aproximação de Fraunhofer é adequada para descrever a difração nessas condições?

A condição de Fraunhofer é de que

$$\frac{D^2}{R\lambda} \ll 1, \tag{19}$$

onde D é o diâmetro da fresta e R é a distância da fresta ao anteparo. Com a luz difratando pelas frestas ao redor da pupila,

$$\frac{R}{D} \gg 1 \tag{20}$$

$$\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-5}} = 10^3 \gg 1. \tag{21}$$

Sim, a aproximação de Fraunhofer é adequada para descrever difração em tais condições.

Questão 4

Alguns filmes contam histórias em que algumas das personagens são encolhidas. Suponha que você passasse por essa experiência e acabasse com 1% de sua altura. Faça uma estimativa do diâmetro de suas pupilas, nessas condições e, a partir do resultado, discuta a importância dos efeitos de difração que ocorreriam. Especificamente, você acha que esses efeitos seriam (a) pouco perceptíveis, (b) secundários, ainda que claramente perceptíveis ou (c) grandes a ponto de prejudicar seriamente a visão?

Caso nossa altura fosse reduzida para apenas 1% do original, é de se esperar que as frestas da íris também diminuam até a mesma proporção, e então

$$D' = 0.01 \cdot 0.02mm = 2 \cdot 10^{-7}m = 200nm. \tag{22}$$

Veja que, agora, a proporção do diâmetro das frestas em relação ao comprimento de onda da luz, em geral da ordem de $500nm$, não respeita mais a aproximação de Fraunhofer:

$$\frac{D'}{\lambda} = \frac{200nm}{500nm} < 1. \tag{23}$$

Em verdade, não há mais difração devido às frestas, já que a abertura é menor que o comprimento de onda. Contudo, se nossa pupila é da ordem de $5mm$, ao encolhermos,

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{R\lambda} &= \frac{(0.01 \cdot 5 \cdot 10^{-3})^2}{0.01 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-7}} && (24) \\ &= 0.01 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-6}}{10^{-8}} && (25) \\ &= 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{2} && (26) \\ &= 25 > 1. && (27) \end{aligned}$$

Mesmo por nossas pupilas, não ocorre difração. Então, nossa visão se mantém razoavelmente inalterada.

Questão 5

Na experiência de Young, a luz passa por duas fendas estreitas. Digamos que cada uma das fendas tenha $0.1mm$ de largura e $1cm$ de altura e digamos que uma das fendas está bloqueada, de forma que a luz passa apenas pela outra. O comprimento de onda da luz é $500nm$. Faça um esboço da imagem que será projetada num anteparo $1m$ adiante da parede onde estão as fendas. Não é necessário especificar distâncias; basta mostrar o formato do padrão luminoso que será formado.

A difração, no caso em questão, segue a condição de Fraunhofer. Como apontado pelo Nussenzveig, M. Curso de Física Básica - Física 4, p. 106, o padrão de difração se apresenta perpendicular à fenda. Então, como nossa fenda está "de pé" (sua altura é bem maior que sua largura), o padrão será lateral. Além disso, ele segue o fator $\sin^2 X/X^2$.

Questão 6

A figura 3 mostra o interferômetro de Michelson e Morley. Nesta questão, estamos interessados no raio de luz que é refletido para cima pelo espelho inclinado no centro do aparelho. Se o interferômetro estiver parado, a luz levará um tempo $\Delta t_1 = 2a/c$ para subir, ser refletido pelo espelho de cima e voltar até o espelho inclinado. Calcule o tempo que a luz vai levar para fazer o mesmo trajeto se o interferômetro estiver correndo para a direita com velocidade v. Trabalhe no sistema de referências do laboratório, no qual o interferômetro tem velocidade v, e a luz se move com velocidade c.

Caso o interferômetro se mova com velocidade v, a luz não viajará apenas a em direção ao espelho de cima. Em verdade, para que ela seja refletida, ela deve andar uma distância que é formada pelo triângulo da figura 4.

Podemos usar o teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + v^2 \Delta t^2, \tag{28}$$

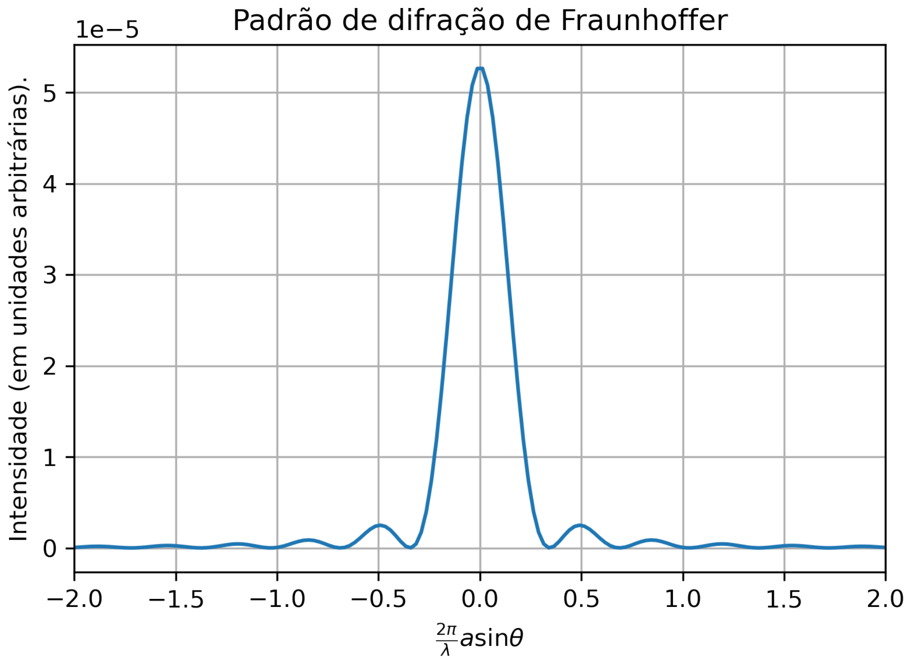


Figura 2: $a = 0.1mm, \lambda = 500nm$

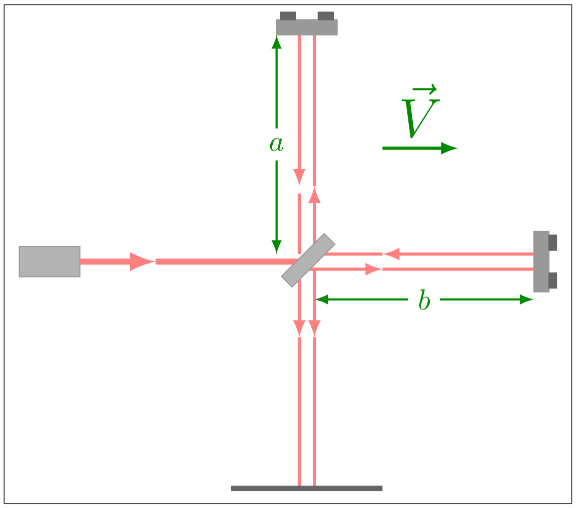


Figura 3: Questões 6 e 7.

onde Δt é o tempo que leva para a luz sair do espelho inclinado e alcançar o espelho superior.

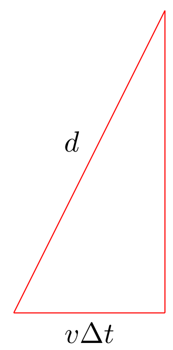


Figura 4: Distância viajada pela luz.

Assim, a distância que a luz viaja pode ser reescrita como $d = c\Delta t$, o que significa

$$c^2\Delta t^2 = a^2 + v^2\Delta t^2 \tag{29}$$
$$a^2 = (c^2 - v^2)\Delta t^2 \tag{30}$$
$$= c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t^2 \tag{31}$$
$$\Delta t = \frac{a}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32}$$

Esse é o tempo que leva para a luz alcançar o espelho superior. A viagem de retorno ao espelho inclinado dura o mesmo tempo, já que o interferômetro viaja à mesma velocidade. Assim, o tempo total de voo é

$$\Delta t_2 = \frac{2a}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{33}$$
$$= \gamma\frac{2a}{c}. \tag{34}$$

Questão 7

Nesta questão, estamos interessados no raio de luz que atravessa o espelho inclinado no centro do aparelho. Se o interferômetro estiver parado, a luz levará um tempo $\Delta t_1 = 2b/c$ para ser refletido pelo espelho da direita e voltar até o espelho inclinado. Calcule o tempo que a luz vai levar para fazer o mesmo trajeto se o interferômetro estiver correndo para a direita com velocidade v. Trabalhe, aqui também, no sistema de laboratório.

Aqui as coisas mudam um pouco de figura. Agora, o tempo que leva para a luz sair do espelho inclinado e alcançar o espelho à direita não é mais o mesmo do caminho contrário, já que o sistema se move como um todo para a direita. A distância que a luz percorre do espelho inclinado ao da direita é de

$$d_{\text{ida}} = b + v\Delta t_{\text{ida}}, \tag{35}$$

e a distância de retorno é

$$d_{\text{volta}} = b - v\Delta t_{\text{volta}}. \tag{36}$$

Na ida, o espelho se afasta da luz com velocidade v, enquanto na volta ele se aproxima com tal velocidade. Podemos reescrever d em função da velocidade da luz e do tempo da trajetória.

$$\begin{cases} c\Delta t_{\text{ida}} = b + v\Delta t_{\text{ida}} \\ c\Delta t_{\text{volta}} = b - v\Delta t_{\text{volta}} \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} (c-v)\Delta t_{\text{ida}} = b \\ (c+v)\Delta t_{\text{volta}} = b \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} \Delta t_{\text{ida}} = \frac{b}{c-v} \\ \Delta t_{\text{volta}} = \frac{b}{c+v} \end{cases} \tag{39}$$

e assim

$$\begin{aligned} \Delta t_2 &= \Delta t_{\text{ida}} + \Delta t_{\text{volta}} && (40) \\ &= b\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) && (41) \\ &= \frac{b}{c^2 - v^2}(c + v + c - v) && (42) \\ &= \frac{2cb}{c^2 - v^2} && (43) \\ &= \frac{2b}{c}\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} && (44) \\ &= \gamma^2 \frac{2b}{c}. && (45) \end{aligned}$$

Questão 8

Para entender melhor o comportamento da luz, é instrutivo entender o som. A figura 5 mostra uma fonte sonora A que se move com velocidade $\mathbf{v}$ na direção de um ponto B, onde está uma observadora. A fonte emite som com frequência ω. O som avança no ar com velocidade c_s. Se a fonte estivesse parada, a observadora receberia uma frente de onda a cada intervalo $T = 2\pi/\omega$. Trabalhe no sistema de referências do laboratório.

1. Calcule o intervalo de tempo entre a chegada de duas frentes nas condições da figura.
2. Que frequência a observadora ouvirá?

1. O tempo entre a chegada de duas frentes pode ser obtido da seguinte maneira: no instante inicial, a fonte gera uma frente de onda, que se propaga com velocidade c_s. A fonte, então, se move uma distância d e gera outra frente de onda que se propaga com c_s. A distância viajada d é de $v\tau$, onde τ é o tempo em que a fonte se move entre a geração das duas frentes. O intervalo de tempo entre a produção de duas frentes de onda é exatamente $\tau = T$. A distância entre as frentes de onda pode ser escrita então como

$$r = (c_s - v)T. \tag{46}$$

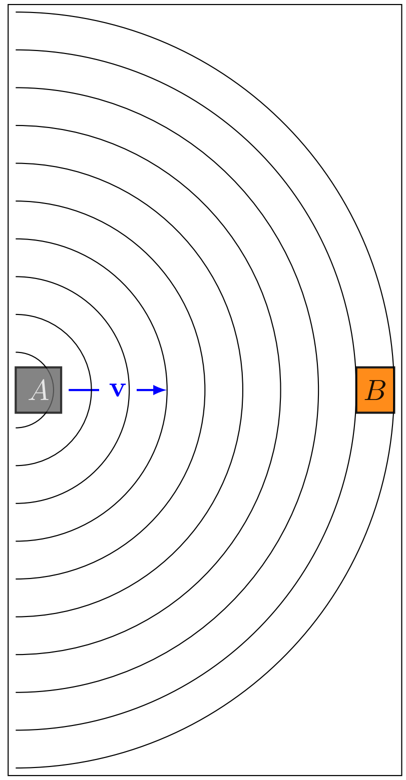


Figura 5: Questão 8.

Como elas se propagam com velocidade c_s, elas demoram um tempo $\Delta t = r/c_s$ para atravessar a distância r. Assim, o intervalo temporal que a observadora percebe é de

$$\Delta t = \frac{c_s - v}{c_s} T \tag{47}$$

$$= \left(1 - \frac{v}{c_s}\right) T < T. \tag{48}$$

2. A frequência que a observadora ouve é

$$\omega' = \frac{2\pi}{\Delta t} \tag{49}$$

$$= \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{v}{c_s}\right) T} \tag{50}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{v}{c_s}} \omega. \tag{51}$$

Veja que, em geral, $v \ll c_s$, que significa que a frequência aumenta $\rightarrow$ a observadora escuta um som mais *agudo*.

Questão 9

Resolva a questão 8 para o caso em que a fonte avança para a esquerda com velocidade v.

Quando a fonte se move para a esquerda, e não para a direita, a distância entre as frentes de onda se torna

$$r = c_s\tau + v\tau \tag{52}$$
$$= c_s\tau - (-v)\tau. \tag{53}$$

Por analogia, podemos pegar o resultado da questão 8 e substituir $v \to -v$, de forma que

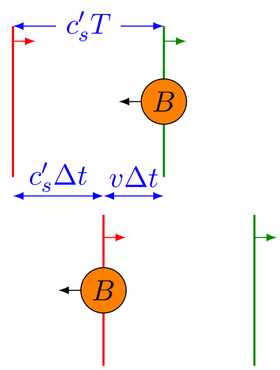
$$\Delta t = \left(1 + \frac{v}{c_s}\right) T \tag{54}$$
$$\omega' = \frac{1}{1 + \frac{v}{c_s}}\omega. \tag{55}$$

Nesse caso, como $1 + v/c_s > 1$, a frequência diminui e a observadora escuta um som mais *grave*.

Questão 10

Resolva a questão 8 no sistema de referências da fonte, com base na equação de Galileu.

No sistema de referências da fonte, ela continua emitindo frentes de onda em intervalos de T, mas agora vê a observadora se mover com $-v$ e a onda se mover com $c_s - v := c'_s$. Agora, a observadora, ao observar uma frente de onda, viaja $-v\Delta t$ até encontrar outra frente de onda, que viajou, desde que a observadora encontrou a primeira frente, $c'_s\Delta t$. Além disso, caso a observadora estivesse em repouso, a segunda frente a encontraria após viajar c'_sT.



Assim, podemos escrever a expressão

$$c'_s\Delta t + v\Delta t = c'_sT \tag{56}$$
$$(c'_s + v)\Delta t = c'_sT \tag{57}$$
$$c_s\Delta t = (c_s - v)T \tag{58}$$
$$\Delta t = \left(1 - \frac{v}{c_s}\right) T. \tag{59}$$

O resultado é, assim, o mesmo da questão 8.