## *Exercícios 10.1*

1. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivável e tal que para todo $x$, $f'(x) = \alpha f(x)$, $\alpha$ constante não nula. Prove
existe uma constante $k$, tal que, para todo $x$, $f(x) = k\, e^{\alpha x}$.

2. Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$f'(x) = 2f(x) \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$

(*Sugestão*: Utilize o Exercício 1.)

3. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$, de modo que em cada instante $t$ a velocidade é o dobro da posição $x = x(t)$. Sabe-se que $x(0) = 1$. Determine a posição da partícula no instante $t$.

4. A função $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) = -2f(x)$ para todo $x$. Esboce o gráfico de $f$.

5. Seja $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo $x$, $f''(x) + f(x) = 0$. Seja $g$ dada por $g(x) = f'(x) \operatorname{sen} x - f(x) \cos x$. Prove que $g$ é constante.

6. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo $x$, $f''(x) + f(x) = 0$. Prove que existe uma constante $A$ tal que

$$\left[\frac{f(x) - A \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]' = 0$$

para todo $x$ em $]0, \pi[$. Conclua que existe uma outra constante $B$ tal que, para todo $x$ em $]0, \pi[$, $f(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

(*Sugestão*: Utilize o Exercício 6.)

7. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2.ª ordem e tal que, para todo $x$, $f''(x) - f(x) = 0$.

*a*) Prove que $g(x) = e^x [f'(x) - f(x)]$, $x \in \mathbb{R}$, é constante.

*b*) Prove que existe uma constante $A$ tal que, para todo $x$, $\left[\dfrac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x}\right]' = 0.$

*c*) Conclua de (*b*) que existe uma outra constante $B$ tal que $f(x) = A e^{-x} + B e^x$, para todo $x$.

8. Sejam $f$ e $g$ duas funções definidas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e que para todo $x$

$$f'(x) = g(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = -f(x).$$

*a*) Mostre que, para todo $x$,

$$(f(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$

*b*) Conclua de (*a*) que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

9. Utilizando o Exercício 1, determine a única função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça as condições dadas.

*a*) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$ e $y(0) = 1$

*b*) $\dfrac{dy}{dx} = -y$ e $y(0) = -1$

*c*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}y$ e $y(0) = 2$

*d*) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}\, y$ e $y(0) = -\dfrac{1}{2}$

10. Determine a função cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 1)$ e tal que a reta tangente no ponto de abscissa $x$ intercepte o eixo $0x$ no ponto de abscissa $x + 1$.

1. Calcule.

a) $\int x \, dx$

b) $\int 3 \, dx$

c) $\int (3x + 1) \, dx$

d) $\int (x^2 + x + 1) \, dx$

e) $\int x^3 \, dx$

f) $\int (x^3 + 2x + 3) \, dx$

g) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

h) $\int \left( x + \frac{1}{x^3} \right) dx$

i) $\int \sqrt{x} \, dx$

j) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

l) $\int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx$

m) $\int (2 + \sqrt[4]{x}) \, dx$

n) $\int (ax + b) \, dx$, $a$ e $b$ constantes

o) $\int \left( 3x^2 + x + \frac{1}{x^3} \right) dx$

p) $\int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

q) $\int \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx$

r) $\int (3\sqrt[5]{x^2} + 3) \, dx$

s) $\int \left( 2x^3 - \frac{1}{x^4} \right) dx$

t) $\int \frac{x^2 + 1}{x} \, dx$

2. Seja $\alpha \neq 0$ um real fixo. Verifique que

a) $\int \operatorname{sen} \alpha x \, dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + k$

b) $\int \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x + k$

3. Calcule.

a) $\int e^{2x}\,dx$

b) $\int e^{-x}\,dx$

c) $\int (x + 3e^{x})\,dx$

d) $\int \cos 3x\,dx$

e) $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$

f) $\int (e^{2x} + e^{-2x})\,dx$

g) $\int (x^2 + \operatorname{sen} x)\,dx$

h) $\int (3 + \cos x)\,dx$

i) $\int \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\,dx$

j) $\int \frac{1}{e^{3x}}\,dx$

l) $\int (\operatorname{sen} 3x + \cos 5x)\,dx$

m) $\int \left(\frac{1}{x} + e^{x}\right)dx,\ x > 0$

n) $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2}\,dx$

o) $\int \cos \frac{x}{3}\,dx$

p) $\int (\sqrt[3]{x} + \cos 3x)\,dx$

q) $\int (x + e^{3x})\,dx$

r) $\int (3 + e^{-x})\,dx$

s) $\int 5e^{7x}\,dx$

t) $\int (1 - \cos 4x)\,dx$

u) $\int \left(2 + \operatorname{sen} \frac{x}{3}\right)dx$

4. Verifique que

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + k,\ -1 < x < 1$

b) $\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + k$

5. Determine a função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

a) $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$ e $y(0) = 2$

b) $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$ e $y(1) = 1$

c) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ e $y(0) = 0$

d) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 3x$ e $y(0) = 1$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x + 3$ e $y(-1) = 0$

f) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ e $y(0) = 1$

*Exercícios 11.5*

Calcule.

1. $\int_0^1 (x + 3)\, dx$

2. $\int_{-1}^1 (2x + 1)\, dx$

3. $\int_0^4 \frac{1}{2}\, dx$

4. $\int_{-2}^1 (x^2 - 1)\, dx$

5. $\int_1^3 dx$

6. $\int_{-1}^2 4\, dx$

7. $\int_1^3 \frac{1}{x^3}$

8. $\int_{-1}^1 5\, dx$

9. $\int_0^2 (x^2 + 3x - 3)\, dx$

10. $\int_0^1 \left(5x^3 - \frac{1}{2}\right) dx$

11. $\int_1^1 (2x + 3)\, dx$

12. $\int_1^0 (2x + 3)\, dx$

13. $\int_{-2}^{-1} \left( \frac{1}{x^2} + x \right) dx$

14. $\int_0^4 \sqrt{x}$

15. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

16. $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\, dx$

17. $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x + 3)\, dx$

18. $\int_0^1 \sqrt[8]{x}\, dx$

19. $\int_1^2 \left( x^3 + x + \frac{1}{x^3} \right) dx$

20. $\int_0^1 (x + \sqrt[4]{x})\, dx$

21. $\int_1^3 \left( 5 + \frac{1}{x^2} \right) dx$

22. $\int_{-3}^{3} x^3\, dx$

23. $\int_{-1}^{1} (x^7 + x^3 + x)\, dx$

24. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x + 3)\, dx$

25. $\int_1^4 (5x + \sqrt{x})\, dx$

26. $\int_1^0 (x^7 - x + 3)\, dx$

27. $\int_1^2 \frac{1 + x}{x^3}\, dx$

28. $\int_0^1 (x + 1)^2\, dx$

29. $\int_1^4 \frac{1 + x}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_0^1 (x - 3)^2\, dx$

31. $\int_0^2 (t^2 + 3t - 1)\, dt$

32. $\int_1^2 \frac{1 + t^2}{t^4}\, dt$

33. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (s + 2)\, ds$

34. $\int_0^3 (u^2 - 2u + 3)\, du$

35. $\int_1^2 (s^2 + 3s + 1)\, ds$

36. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{t}\, dt$

37. $\int_1^3 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx$

38. $\int_1^2 \frac{1 + 3x^2}{x}\, dx$

39. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

40. $\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} 3x\, dx$

41. $\int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx$

42. $\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt$

43. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\, dx$

44. $\int_{-1}^{0} e^{-2x}\, dx$

## *Exercícios 11.6*

Nos Exercícios de 1 a 22, desenhe o conjunto $A$ dado e calcule a área.

1. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^3$.
2. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
3. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 0$.
4. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $0 \leqslant y \leqslant 4 - x^2$.
5. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $0 \leqslant y \leqslant |\operatorname{sen} x|$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
6. $A$ é a região do plano compreendida entre o eixo $0x$ e o gráfico de $y = x^2 - x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2$.
7. $A$ é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = 3 - 2x - x^2$, com $-1 \leqslant x \leqslant 2$.
8. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2 + 2x + 5$.
9. $A$ é o conjunto do plano limitado pelo eixo $0x$, pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
10. $A$ é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2$.

11. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \cos x$.
12. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x \geqslant 0$ e $x^3 \leqslant y \leqslant x$.
13. $A$ é o conjunto do plano limitado pela reta $y = x$, pelo gráfico de $y = x^3$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
14. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 3\}$.
15. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.
16. $A$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tais que $x^2 + 1 \leqslant y \leqslant x + 1$.
17. $A$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tais que $x^2 - 1 \leqslant y \leqslant x + 1$.
18. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$.
19. $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ e } x^3 - x \leqslant y \leqslant -x^2 + 5x \}$.
20. $A$ é o conjunto do plano limitado pelos gráficos de $y = x^3 - x$, $y = \operatorname{sen} \pi x$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
21. $A$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tais que $x \geqslant 0$ e $-x \leqslant y \leqslant x - x^2$
22. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x > 0$ e $\dfrac{1}{x^2} \leqslant y \leqslant 5 - 4x^2$.
23. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $x$ com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geqslant 0$.
    *a*) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.
    *b*) Qual o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?
    *c*) Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$
24. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = \operatorname{sen} 2t$, $t \geqslant 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.
25. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = -t^2 + t$, $t \geqslant 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
26. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 3$, $t \geqslant 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.