Universidade de São Paulo

Lista 4 - Física 1 (4310145)

Instruções

- A lista deve ser manuscrita!
- Para entregar sua lista, faça um upload para https://mega.nz/megadrop/6Blr5qcXTJM
- Não esqueça de colocar seu nome e número USP na lista!
- Não coloque apenas a resposta final! Apresente seus cálculos, faça diagramas, desenhos e explique, da melhor maneira possível, as etapas da resolução.
- Quando você digitalizar sua lista, coloque todos os exercícios em um mesmo arquivo (preferencialmente pdf) em ordem. Se você não sabe fazer isso, procure aprender com antecedência. Antes de enviar, certifique-se que a digitalização ficou legível. O nome do arquivo da sua lista deve ter a forma "primeiro nome-número USP-Lista-X", onde X é o número da lista. Por exemplo: "jader-12345678-Lista-3.pdf"
- Você pode e deve discutir a sua lista com seus colegas, mas não deve copiar a lista dos seu colegas.
- Se você tiver qualquer dúvida, entre em contato! ;)

1. Uma pessoa arremessa um corpo de massa m, que alcança uma distância L. Supondo que o corpo deixa a mão do lançador a uma altura h e que o ângulo do arremesso seja $\theta = 45°$, mostre que o trabalho feito pelo pelo lançador (desprezando a resistência do ar) é dado por

$$W = \frac{mg}{2}\frac{L^2}{h+L} \tag{1}$$

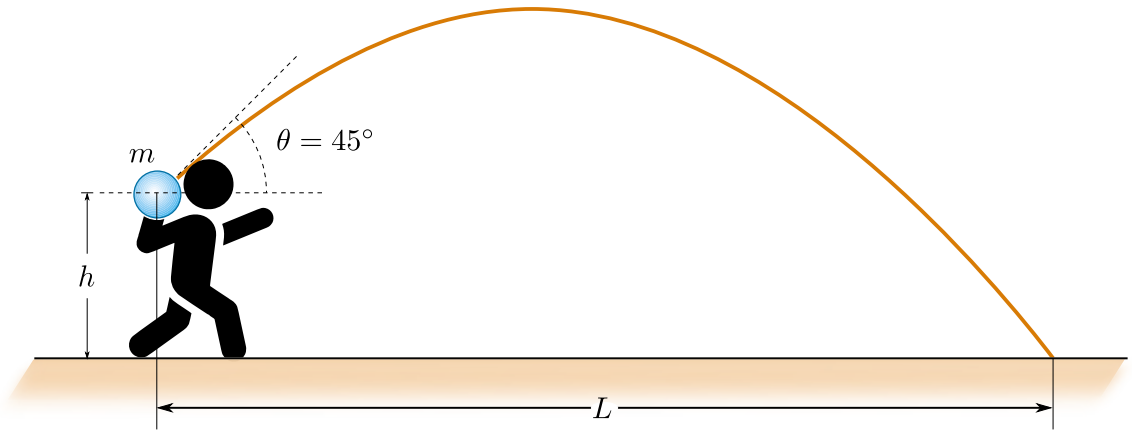


Figura 1: Problema 1.

2. Uma partícula de massa m move-se da origem até a posição C, cujas coordenadas são $x = x_f$ e $y = y_f$ (ver Figura 2.). Considere que a força gravitacional atua na partícula na direção negativa do eixo y. Calcule o trabalho feito pela força gravitacional quando a partícula move-se de O até C pelo caminho (a) OAC, (b) OBC, e (c) OC. O resultado em cada caso deveria ser o mesmo? Por que?

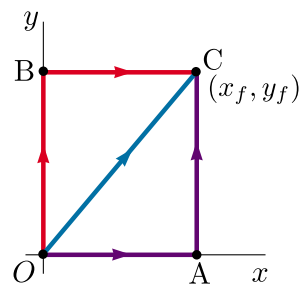


Figura 2: Problemas 2 e 3.

3. Uma partícula de massa m move-se da origem até a posição C, cujas coordenadas são $x = x_f$ e $y = y_f$ (ver Figura 2.). Considere que a força $\vec{F} = (2y\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath})$ atua na partícula. Calcule o trabalho feito pela força $\vec{F}$ quando a partícula move-se de O até C pelo caminho (a) OAC, (b) OBC, e (c) OC. A força $\vec{F}$ é uma força conservativa?
4. Uma corda passa por duas polias, como mostrado na Figura 3. Uma massa de 20kg está pendurada em uma das polias e uma força $\vec{F}$ é aplicada à extremidade livre da corda.

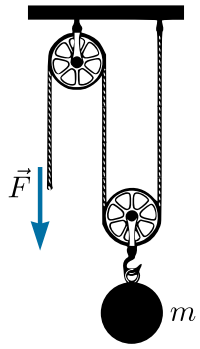


Figura 3: Problema 4.

   (a) Qual deve ser o módulo de $\vec{F}$ para que a massa seja levantada com velocidade constante?
   (b) Qual deve ser o deslocamento da corda para que a massa suba $2,0$cm?
   (c) Durante esse deslocamento, qual é o trabalho realizado sobre a massa pela força aplicada (por meio da corda) e pela força gravitacional?
5. Uma conta de massa m pode deslizar sem atrito ao longo de uma haste fixa AB. Sabendo que a mola está relaxada na configuração simétrica mostrada na Figura 4, qual deve ser a velocidade v_0 necessária para a conta poder chegar até o ponto P. Considere o coeficiente da mola como $k = 100$N/m, a massa da conta $m = 0,5$kg, e as distâncias $\ell = 10$cm e $L = 24$cm.

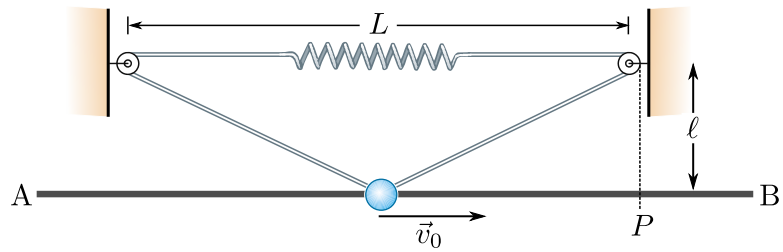


Figura 4: Problema 5.

6. Uma partícula de massa m é ligada a duas molas idênticas (de constante de mola k) em uma mesa horizontal, sem atrito, como mostrado na Figura 5. Considere que quando a massa se encontra exatamente no meio da figura (vamos considerar essa posição como $x = 0$), as molas não tem deformação. Quando a massa é puxada uma distância x a partir da posição $x = 0$, mostre que a energia potencial do sistema é

$$U(x) = kx^2 + 2kL(L - \sqrt{x^2 + L^2}) \tag{2}$$

onde consideramos $U(0) = 0$.

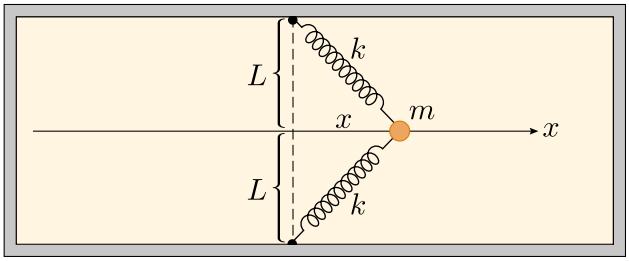


Figura 5: Problema 6.

7. Um bloco desliza em uma superfície curva sem atrito e então sobe um plano inclinado com atrito, como mostrado na Figura 6. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é μ_k. Use o que você sabe sobre energia para mostrar que a altura máxima y alcançada pelo bloco é

$$y = \frac{h}{1 + \mu_k \cot\theta} \tag{3}$$

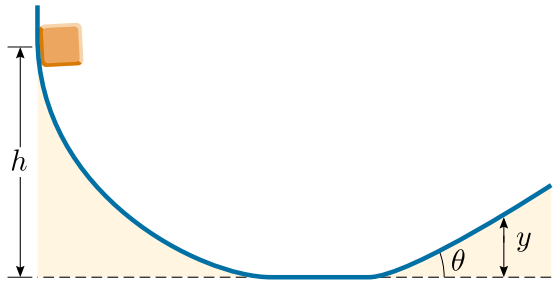


Figura 6: Problema 7.

8. Estude o Apêndice A, refaça os cálculos (apresentando todas as passagens) para mostrar como podemos escrever o operador vetorial $\vec{\nabla}$ em coordenadas polares, isto é, mostre como é possível obter a expressão (38) a partir da expressão (26).

9. Suponha que uma partícula está em repouso na extremidade superior de uma esfera de raio r. A partícula desliza (sem atrito), sob ação da gravidade. Mostre que quando $\theta = \sin^{-1}(2/3)$ [ver Figura 7] a partícula deixa de fazer contato com a esfera. Considere que a esfera de raio r tem uma massa muito grande com relação a esfera pequena, tal que durante esse processo ela não se move. [Tente resolver o problema, caso não consiga, veja sugestões no Apêndice B]

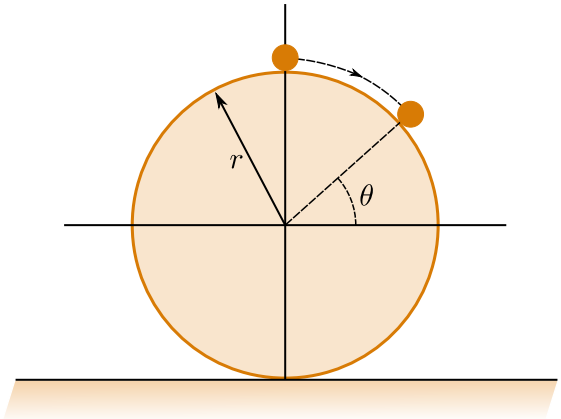


Figura 7: Problema 9.

10. Uma força $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + y^2x\hat{\jmath}$ age sobre uma partícula (ver Figura 8). Calcule o trabalho realizado por esta força desde $(0,0)$ até $(1,1)$ nos seguintes casos:
    (a) ao longo da reta $y = x$
    (b) ao longo da parábola $y = x^2$
    (c) Considere a curva verde na Figura 8. Note que ela é a curva azul refletida com relação a curva vermelha. Apenas olhando para a Figura, você espera que o trabalho ao longo desse caminho seja próximo do trabalho ao longo do caminho $y = x^2$ (explique)?
    (d) Calcule o trabalho realizado ao longo da curva verde.

```
FIG1 = VectorPlot[{x^2 y, y^2 x}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, VectorScaling → Automatic, VectorSizes → {1, 1},
   PlotLegends → Placed[BarLegend["Rainbow", LegendMarkerSize → 360, LegendMargins → {{0, 0}, {18, 0}}], Automatic], Axes → True,
   Prolog → {RGBColor[255/255, 243/255, 198/255], Rectangle[Scaled[{0, 0}], Scaled[{1, 1}]]}, FrameLabel → {x, y}];
FIG2 = Plot[{x, x^2}, {x, 0, 1}, PlotStyle → {{Red, Thickness[0.008]}, {Blue, Thickness[0.008]}}, AxesLabel → Automatic, PlotLegends → {"y=x", "y=x^2"}] /.
   Line[x_] :→ {Arrowheads[{0, 0.08, 0}], Arrow[x]};
Show[FIG1, FIG2, FIG3]
```

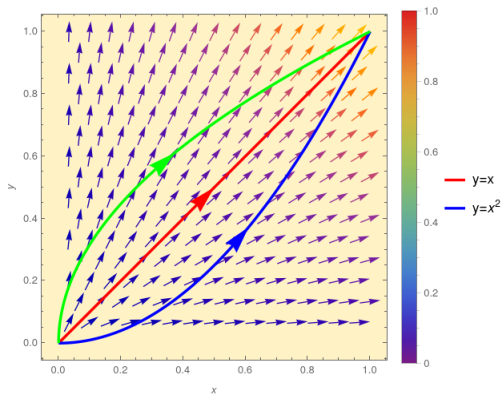


Figura 8: Campo vetorial da força $\vec{F}$. Nesta figura a intensidade da força não é representada pelo tamanho do vetor, mas sim pela sua cor (indicada na legenda). Também são mostrados os caminhos $y = x$ e $y = x^2$.

11. Resolva o item (a) do exercício anterior usando coordenadas polares. [Dica: ver Apêndice C.]
12. Suponha que um objeto de massa m é projetado verticalmente para cima da superfície da Terra, com velocidade inicial v_i.
    (a) Estude o Apêndice D
    (b) Qual é o valor mínimo para v_i necessário para permitir que o objeto escape do campo gravitacional da Terra? Considere a energia potencial gravitacional como sendo dada pela Eq. (59).
13. Uma corrente de comprimento L e massa m é mantida em uma mesa sendo que um quarto de seu comprimento é suspenso na beirada, como mostrado na Figura 9. Considerando que não existe atrito entre a corrente e a mesa, qual é o trabalho necessário para puxar a parte suspensa para cima da mesa?

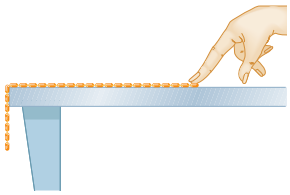


Figura 9: Problema 13.

14. Considere uma partícula que está sob efeito da força $\vec{F} = \frac{F_0}{r}(y\hat{\imath} - x\hat{\jmath})$ em que F_0 é uma constante positiva e r é distância da partícula até à origem.
    (a) Mostre que $|\vec{F}| = F_0$ e que $\vec{F}$ é perpendicular a $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

(b) Encontre o trabalho realizado pela força sobre a partícula, quando a partícula completa uma volta em um círculo de raio b

15. As forças interatômicas são de natureza eletromagnética. Isto é evidente no caso de um cristal iônico, como sal de cozinha (NaCl), formado de íons positivos (Na^+) e negativos (Cl^-), em que as forças de ligação resultam da atração eletrostática entre íons de cargas opostas. Entretanto, o mesmo vale para as forças entre átomos ou moléculas neutras. Neste caso, as cargas positivas (núcleo) e negativas (nuvem eletrônica) não estão concentradas no mesmo ponto: há uma distribuição de carga. Quando dois átomos neutros se aproximam um do outro, as interações eletromagnéticas entre as duas distribuições de cargas as modificam, dando origem às forças entre os átomos neutros. À medida que os átomos vão se aproximando entre si, estas forças são inicialmente atrativas e aumentam rapidamente de intensidade. Quando comprimimos suficientemente um gás, ele tende a se condensar (liquefazer), demonstrando o efeito das forças atrativas, que se chamam forças de Van der Waals. Uma vez liquefeito, o fluido tende a resistir fortemente à compressão, e sabemos que o mesmo acontece com sólidos. Isto sugere que, a distâncias suficientemente pequenas, as forças interatômicas são fortemente repulsivas. Isso acontece quando dois átomos se aproximam a distâncias da ordem do raio atômico. Nessas condições, começa ocorrer a interpenetração entre as suas nuvens eletrônicas, e a repulsão Coulombiana entre elas se opõe à interpenetração, dando origem as forças repulsivas[1].

A energia potencial associada com a força entre dois átomos neutros em uma molécula pode ser modelada pela função energia potencial de Lennard-Jones

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] \tag{4}$$

em que x é a separação entre os átomos. A função $U(x)$ contém dois parâmetros σ e ϵ. Esses parâmetros são determinados experimentalmente.

(a) Encontre uma expressão para a distância mais provável entre os átomos.

(b) Plote a Eq. (4). Considere $\sigma = 0,263$nm e $\epsilon = 1,51 \times 10^{-22}$J. [Você pode usar o mathematica para fazer este plot. Veja dicas nos Apêndice E]. O resultado do item (a) concorda com o gráfico?

(c) Determine a expressão para força $F(x) = -\frac{d}{dx}[U(x)]$ e plote a força em função da distância.

(d) Mostre que a frequência para pequenas oscilações da molécula é dada por

$$\nu = 3\,\frac{2^{1/3}}{\pi\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{m}} \tag{5}$$

[Dica: veja o Apêndice F.]

16. Considere uma partícula de massa m sob a ação de uma força $\vec{F}$. Considere a quantidade escalar

$$A = m\vec{v}\cdot\vec{r} \tag{6}$$

em que $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula e $\vec{v}$ sua velocidade.

[1] Texto adaptado de [1]

(a) Mostre que

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{r} + 2K \tag{7}$$

em que K é a energia cinética da partícula.

(b) A média temporal sobre qualquer intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ de qualquer função $f(t)$ é definida como[2]

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} f(t) dt \tag{8}$$

Fazendo $f(t) = \frac{dA}{dt}$, obtemos

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} dA \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\Delta t} (A(t_f) - A(t_i)) \tag{10}$$

Se Δt é muito grande (por exemplo, por tomarmos $t_i = 0$ e t_f para ser muito grande) e se A não cresce indefinidamente com o tempo, o lado direito da Eq. (10) tende a zero. Este é o caso de uma partícula que se move em uma região limita do espaço, como, por exemplo, um elétron em um átomo. O elétron terá valores limitados para $\vec{r}$ e $\vec{v}$. O mesmo acontece no caso da Terra se movendo em torno do Sol. Portanto, tomando $\langle dA/dt \rangle = 0$, obtemos

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle \tag{11}$$

A Eq. (11) é conhecido como teorema do virial para uma partícula.

Considerando uma partícula com energia potencial da forma

$$U(r) = -\frac{k}{r^n} \tag{12}$$

em que k é uma constante e r é o módulo do vetor posição $\vec{r}$ (ver Figura 10) mostre que o teorema do virial assume a forma

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} n \langle U(r) \rangle \tag{13}$$

Note que para o caso de um potencial gravitacional, ou elétrico, $n = 1$ e obtemos a relação

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle U(r) \rangle \tag{14}$$

[2] Aqui $\langle f(t) \rangle$ representa a média temporal da função $f(t)$.

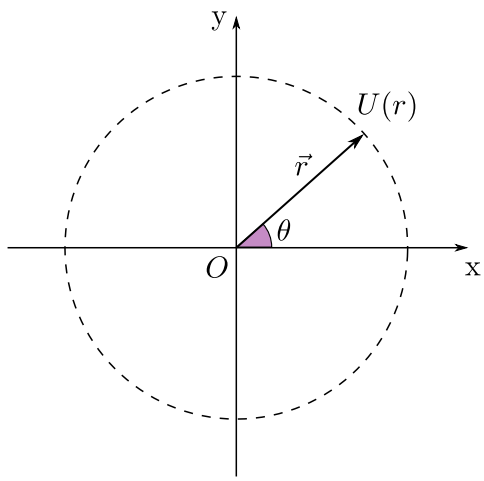


Figura 10: Energia potencial $U(r)$. O vetor $\vec{r}$ é definido por duas coordenadas r e θ. Entretanto, o potencial não depende de θ, apenas de r.

(c) A função para a posição em função do tempo de um oscilador harmônico pode ser escrita como

$$x(t) = A\sin(\omega t) \tag{15}$$

e o vetor posição será escrito como $\vec{r} = x(t)\hat{\imath}$. Mostre que o teorema do virial, Eq. (11), é valido para o oscilador harmônico.

17. Em uma molécula de HCl a energia potencial de interação entre os átomos é dado (aproximadamente) pelo potencial de Morse:

$$U(r) = c(1 - e^{-a(r-r_0)})^2 \tag{16}$$

em que c, a e r_0 são constantes positivas e r é a distância entre os átomos.

(a) Esboce um gráfico da energia potencial. Qual é a distância de equilíbrio entre os átomos?

(b) Qual é a frequência das pequenas oscilações da molécula?

18. Considere um pêndulo de massa m e comprimento L. A massa é suspensa com o fio na horizontal e então é largada do repouso.

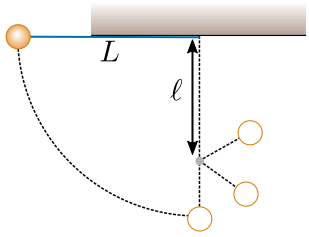


Figura 11: Problema 18.

No ponto mais baixo da trajetória, o fio se prende a um prego que está a uma distância ℓ abaixo da posição em que o pêndulo está fixado. Mostre que ℓ deve ser maior do que $3L/5$ para que o fio permaneça tenso enquanto a massa completa uma volta em torno do prego.

19. Considere um plano inclinado sem atrito como mostrado na Figura 12. Suponha também que, inicialmente, o bloco está em repouso e a mola não está nem comprimida nem esticada.

    (a) Qual distância o bloco se desloca no plano inclinado até atingir o repouso?

    (b) Quando o bloco atinge o repouso, qual é a sua aceleração?

    (c) Descreva as transformações da energia durante o deslocamento do bloco.

    Escreva suas respostas em função de θ, m, k e g.

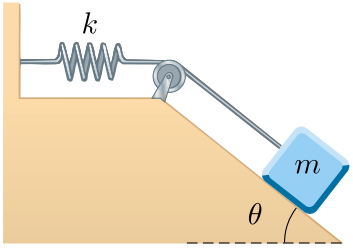


Figura 12: Problema 19.

Apêndice

A Força e gradiente da energia potencial [3]

Vimos que no caso unidimensional uma força conservativa pode ser calculada se conhecermos a energia potencial correspondente como função da posição

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{17}$$

Podemos estender esse resultado para o caso tridimensional. Para isso vamos calcular a variação da energia potencial correspondente a um deslocamento de x para $x + \Delta x$ (ver Figura 13). Se aplicarmos a relação geral

$$U_{P_2} - U_{P_1} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{x_1}^{x_2} F_x dx - \int_{y_1}^{y_2} F_y dy - \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \tag{18}$$

para o caso mostrado na Figura 13 teremos $dy = 0$ e $dz = 0$. Ficaremos com

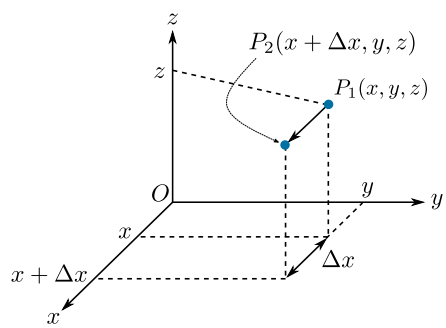


Figura 13

$$U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = -\int_{x}^{x+\Delta x} F_x(x', y', z') dx' \tag{19}$$

Note que se Δx for suficientemente pequeno, teremos

$$U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = -\int_{x}^{x+\Delta x} F_x(x', y', z') dx' \approx -F_x(x, y, z)\Delta x \tag{20}$$

A aproximação se torna exata no limite em que $\Delta x \to 0$. Neste caso, podemos escrever

$$-F_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) \tag{21}$$

[3] Parte deste apêndice foi adaptado de [1].

onde o limite acima define a derivada parcial de U em relação a x, calculada no ponto (x, y, z): é uma derivada em que somente se leva em conta a variação com x, mantendo y e z constantes.

Analogamente, quando consideramos deslocamentos nas direções y e z, obtemos as duas outras componentes da força F_x e F_y. Por analogia, temos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{22}$$

As Eqs. (22) mostram como podemos calcular as três componentes da força se conhecermos a energia potencial $U(x, y, z)$ como função da posição. Considere por exemplo o potencial harmônico em duas dimensões $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ (ver Figura 14). Nesse caso, as componentes x e y da força que atua em uma partícula sujeita a essa potencial, serão dadas por

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right] = -kx \tag{23}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right] = -ky \tag{24}$$

Podemos portanto escrever o vetor força que atua na partícula como

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} = -kx\hat{\imath} - ky\hat{\jmath} \tag{25}$$

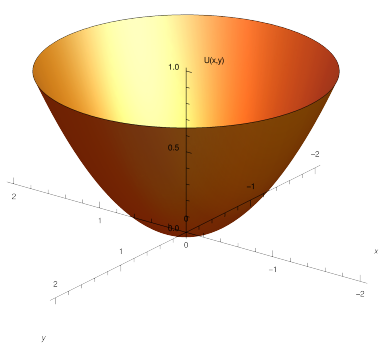


Figura 14: Potencial harmônico em duas dimensões. Consideramos aqui $k = 1\text{N/m}$.

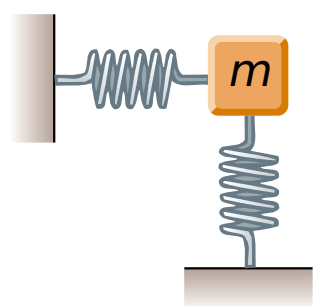


Figura 15: Exemplo de um sistema físico que apresenta um potencial harmônico em duas dimensões.

Operador gradiente

Vamos definir o operador vetorial $\vec{\nabla}$ como[4]

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}} \tag{26}$$

[4] O simbolo ∇ é chamado de nabla.

A ação do operado vetorial $\vec{\nabla}$ em uma função escalar qualquer $f(x, y, z)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f(x,y,z) &= \left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] f(x,y,z) \\
&= \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right)\hat{k}
\end{aligned} \tag{27}$$

Note que a operação $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ resultou em um vetor. Esse vetor é chamado de gradiente da função escalar $f(x, y, z)$.

Vimos que uma partícula em um potencial $U(x, y, z)$ estará sujeira a uma força cujas componentes são dadas pela Eq. (22). Note que podemos usar o operador $\vec{\nabla}$ para escrever

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y,z)} \tag{28}$$

Por exemplo, consideremos o potencial gravitacional de uma partícula próxima a superfície da Terra. Neste caso, teremos $U(y) = mgy$. Aplicando a relação Eq. (28), obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\vec{\nabla} U(y) \\
&= -\left[\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right](mgy) \\
&= -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial y}\right)\hat{\jmath} \\
&= -mg\hat{\jmath}
\end{aligned} \tag{29}$$

Operador gradiente em coordenadas polares

Em um problema em que a energia potencial dependa da posição em um sistema envolvendo apenas duas dimensões, podemos trabalhar com as coordenadas polares. Neste caso a energia potencial poderá ser escrita em função das coordenadas (r, θ).

Dependendo da simetria do sistema, seu estudo pode se tornar mais fácil se usarmos as coordenadas polares. Um exemplo dessa situação é o sistema formado por uma estrela e um planeta. Podemos considerar que a massa da estrela é muito maior que a massa do planeta e considerar a origem do sistema de coordenadas como sendo a estrela. Neste caso, podemos escrever a energia potencial de uma massa qualquer (como, por exemplo, o planeta) interagindo com a estrela como sendo $U(r, \theta)$.

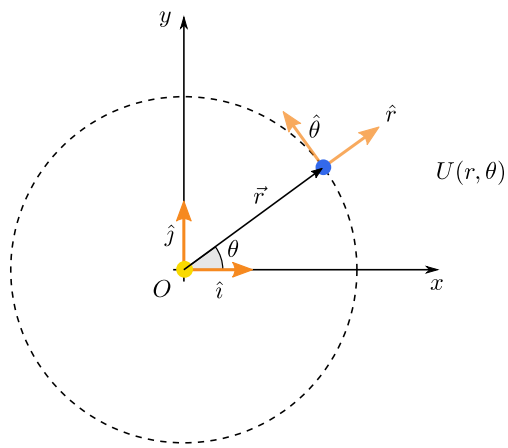


Figura 16: Descrevendo o sistema planeta-estrela usando coordenadas esféricas.

Se conhecermos o potencial $U(r,\theta)$, podemos calcular a força que atua no planeta. Para isso, basta aplicarmos a relação $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r,\theta)$. Porém, temos de escrever o operador $\vec{\nabla}$ em coordenadas polares. Já aprendemos como relacionar as coordenadas x e y com as coordenadas r e θ. Basta usarmos as relações

$$x = r\cos\theta \tag{30}$$

$$y = r\sin\theta \tag{31}$$

e

$$\theta = \arctan(y/x) \tag{32}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{33}$$

Para escrevermos o operador $\vec{\nabla}$ em coordenadas polares, teremos de aplicar sucessivamente a regra da cadeia. Ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned} \tag{34}$$

além disso

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\\ &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\\ &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned} \tag{35}$$

Já vimos como escrever os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ usando os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, isto é,

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath} \qquad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} \tag{36}$$

Podemos também escrever os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ usando os vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{r}$. Ficamos com

$$\hat{\imath} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta} \qquad \hat{\jmath} = \sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta} \tag{37}$$

Note agora que podemos usar as equações (34), (35) e (37) para escrever o operador $\vec{\nabla}$ em coordenadas polares:

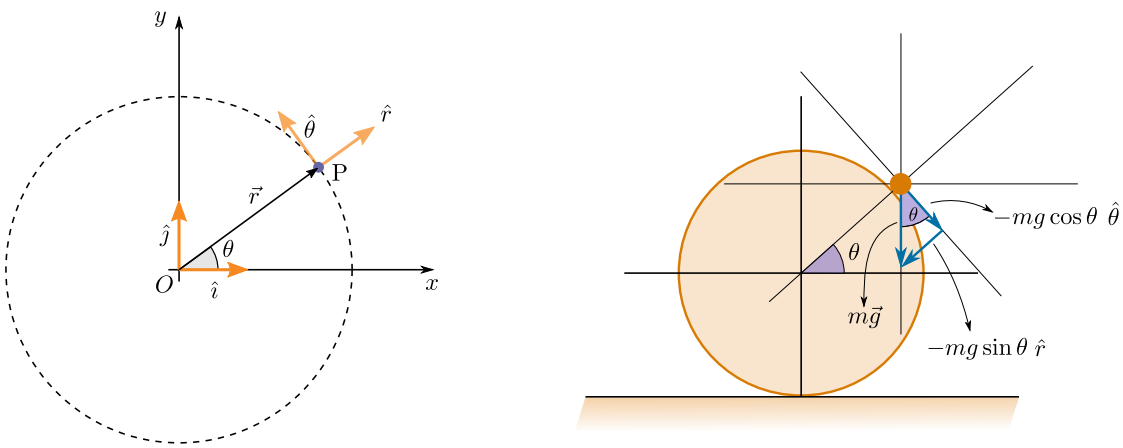
$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}} \tag{38}$$

Portanto, caso tenhamos a função energia potencial em coordenadas polares a força que atua na partícula pode ser calculada como

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r,\theta)} \tag{39}$$

B Dicas para o Problema 9

A primeira ideia que teremos de usar para resolver esse problema é a conservação da energia mecânica do sistema. A segunda ideia é a de que *enquanto a partícula está na superfície da esfera* ela está transcrevendo um movimento circular. Para que o movimento circular ocorra, é necessário que exista uma força com componente centrípeta. A força centrípeta tem direção radial e aponta para o centro, isto é, aponta na direção $-\hat{r}$ (ver Figura 17). As forças que atuam na partícula são a força gravitacional e a força normal à superfície (a força normal à superfície que atua na partícula tem direção $\hat{r}$ e não está sendo mostrada na figura). Entretanto, quando a partícula está na iminência de deixar a superfície, a força normal é zero, e a única força que atua na partícula e tem componente na direção radial é a força gravitacional.



(a) (b)

Figura 17: (a) Está figura está aqui só pra você lembrar quem são os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$. (b) Decomposição da força gravitacional $m\vec{g}$ em suas componentes na direção do vetor unitário $\hat{r}$ e do vetor unitário $\hat{\theta}$.

C Calculo do trabalho usando coordenadas polares

A expressão para calcularmos o trabalho é dada por

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell} \tag{40}$$

Quando estamos trabalhando em coordenadas retangulares, podemos escrever (em duas dimensões) [5]

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\hat{\imath} + F_y(x,y)\hat{\jmath} \tag{43}$$

e além disso, escrevemos o vetor deslocamento diferencial $d\vec{\ell}$ como (ver Figura 19(b))

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} \tag{44}$$

Finalmente, a Eq. (40) pode ser escrita como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x,y)dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y(x,y)dy \tag{45}$$

[5] Note que escrever $\vec{F}(\vec{r})$ é o mesmo que escrever $\vec{F}(x,y,z)$, uma vez que o vetor $\vec{r}$ carregas as mesmas informações que suas componentes (x,y,z). O mesmo vale para uma componente qualquer do vetor $\vec{F}$, ou seja, $F_i(\vec{r})$ é o mesmo que $F_i(x,y,z)$ em que i representa uma componente qualquer x, y ou z. Se quisermos escrever o vetor força, por exemplo, na posição $\vec{r} = 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$, teremos

$$\vec{F}(2,0,3) = F_x(2,0,3)\hat{\imath} + F_y(2,0,3)\hat{\jmath} + F_z(2,0,3)\hat{k} \tag{41}$$

É muito importante aqui não confundir os subíndices x, y e z que indicam a componente do vetor (por exemplo, $F_y(x,y,z)$ representa a componente y do vetor $\vec{F}$), com as variáveis x, y e z. Note que, em geral, cada componente pode depender das três variáveis x, y e z.

Caso estivéssemos usando outro sistema de coordenadas, como por exemplo coordenadas esféricas, teríamos de escrever

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r,\theta,\phi) = F_r(r,\theta,\phi)\hat{r} + F_\theta(r,\theta,\phi)\hat{\theta} + F_\phi(r,\theta,\phi)\hat{\phi} \tag{42}$$

Podemos fazer o mesmo mas agora usando coordenadas polares. Vamos começar escrevendo o vetor força em coordenadas polares (ver Figura 18)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r,\theta) = F_r(r,\theta)\hat{r} + F_\theta(r,\theta)\hat{\theta} \tag{46}$$

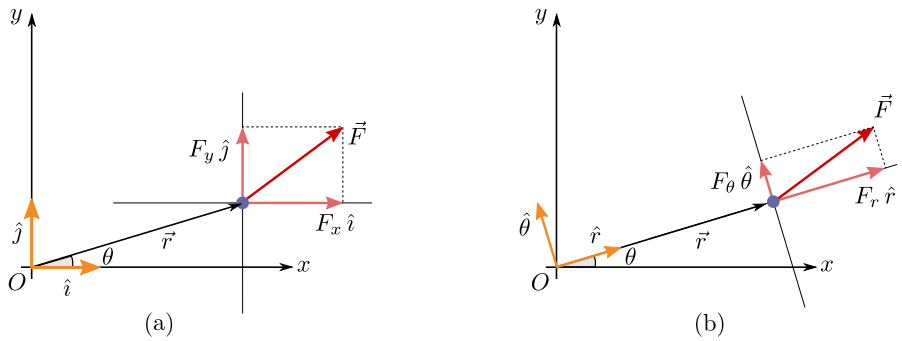


Figura 18: (a) Vetor força decomposto em coordenadas retangulares. (b) Vetor força decomposto em coordenadas polares.

Temos agora de encontrar o vetor deslocamento diferencial $d\vec{\ell}$ em coordenadas polares. Da Figura 19(c) temos

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} \tag{47}$$

Podemos finalmente escrever o trabalho como

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F_r(r,\theta)dr + \int_{\theta_i}^{\theta_f} rF_\theta(r,\theta)d\theta \tag{48}$$

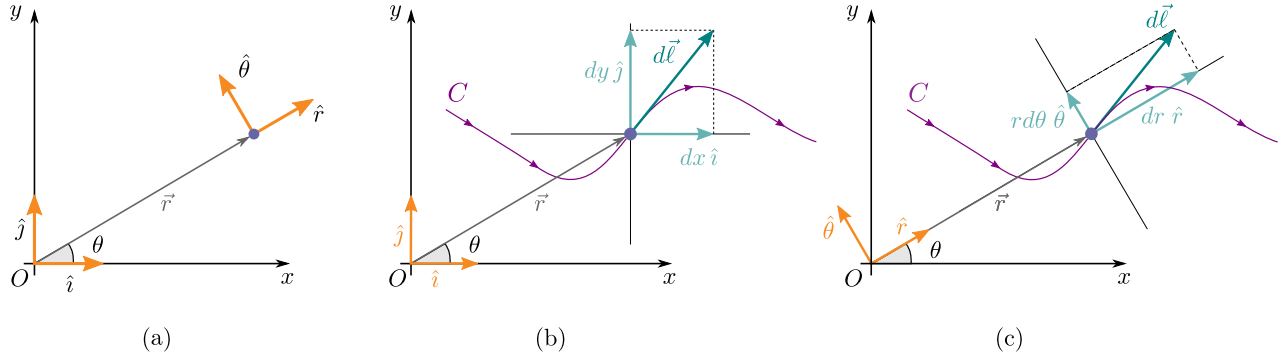


Figura 19: (a) Vetor posição $\vec{r}$ e os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$. (b) Em roxo mostramos uma trajetória qualquer C. Também é mostrado como decompor o vetor deslocamento diferencial $d\vec{\ell}$ em suas componentes retangulares. (c) Em roxo mostramos uma trajetória qualquer C. Também é mostrado como decompor o vetor deslocamento diferencial $d\vec{\ell}$ em suas componentes polares.

No caso do problema 11, temos a força $\vec{F}(\vec{r})$ dada em coordenadas cartesianas, e precisamos escreve-la em coordenadas polares. Para isso, podemos usar

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{49}$$

além disso, podemos escrever os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ em função dos vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$. Vamos começar escrevendo os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ em função de $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{50}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \tag{51}$$

Note que podemos escrever as equações acima na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix} \tag{52}$$

Note que podemos agora calcular os versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ simplesmente por fazer [6]

$$\begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \tag{54}$$

Com o auxílio das equações (49) e (54) você já deve ser capaz de escrever o vetor força em coordenadas polares e calcular o trabalho.

D Energia potencial gravitacional na escala astronômica[7]

Consideremos um objeto em queda livre na direção radial no campo gravitacional da Terra. Ele se aproxima desde uma distância inicial r_i até uma distância r_f do centro O da Terra, como mostrado na Figura 20.

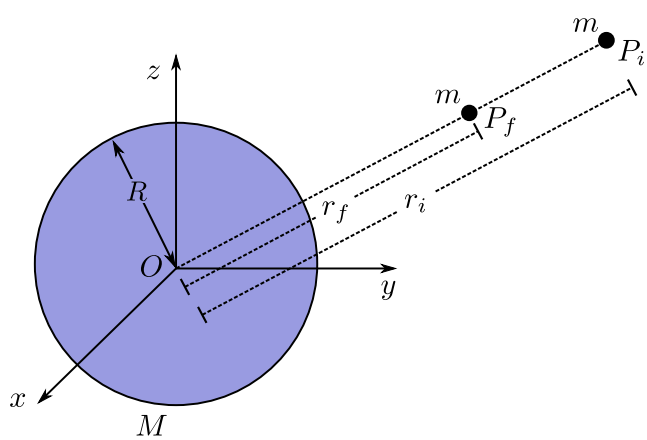


Figura 20: Energia potencial gravitacional na escala astronômica.

[6] Inversão de matrizes 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{53}$$

[7] Texto baseado na Ref. [1]

No caso em que r_f e r_i são grandes comparados com o raio R da Terra, não podemos aproximar o campo gravitacional da Terra como uniforme. A força gravitacional $\vec{F}$ exercida pela Terra (massa M) sobre a partícula (massa m) é dada por

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r} \tag{55}$$

onde r é distância entre a partícula e o centro da Terra (ver Figura 20) e $\hat{r}$ é um vetor unitário que aponta na direção da massa m a partir da origem O.

A força Eq. (55) é uma força central[8], com

$$F(r) = -\frac{GmM}{r^2} \tag{56}$$

A força gravitacional é conservativa, e a variação de energia potencial gravitacional da partícula considerada, entre as distâncias r_0 e r do centro da Terra, é dada por

$$\begin{aligned} U(r_f) - U(r_i) &= -\int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \\ &= GmM\int_{r_i}^{r_f} r^{-2}dr \\ &= GmM\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right) \end{aligned} \tag{57}$$

Costuma-se tomar o nível zero de energia potencial no infinito, ou seja,

$$\lim_{r\to\infty} U(r) = 0 \tag{58}$$

Assim, se adotarmos $r_f = r$ e $r_i = \infty$, podemos reescrever a Eq. (57) como

$$\boxed{U(r) = -\frac{GmM}{r}} \tag{59}$$

A Eq. (59) só vale para $r > R$ (pois a força Eq. (55) só é vale para $r > R$).

[8] Diz-se que uma partícula está sujeita a forças centrais numa dada região do espaço quando a força $\vec{F}$ exercida sobre a partícula em um ponto P dessa região tem as seguintes propriedades:

- Está dirigida segunda a linha OP que liga P a um ponto O fixo, chamado centro de forças;
- A magnitude de $\vec{F}$ só depende da distância $r = |OP|$ ao centro de forças. Logo $|\vec{F}|$ tem o mesmo valor em todos os pontos de uma esfera de raio r com centro em O.

isso equivale a escrevermos $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ em que $F(r)$ pode ser positivo (força repulsiva) ou negativo (força atrativa).

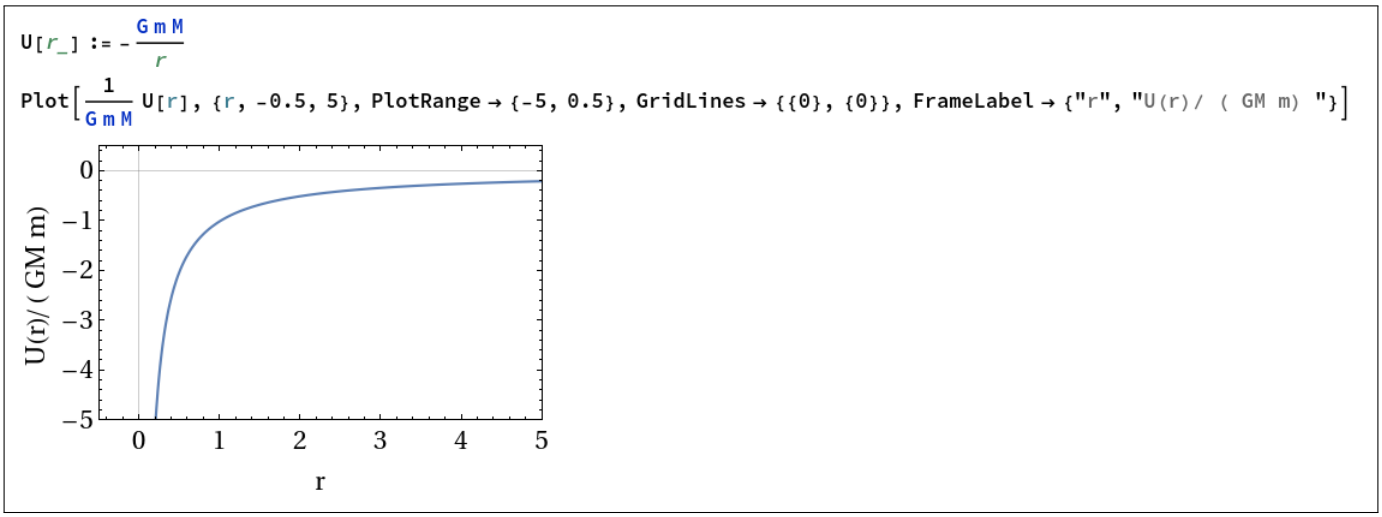


Figura 21: Plot da energia potencial gravitacional usando o mathematica. Como discutimos no texto, quando a distância r tende a infinito, o potencial tende a zero.

Podemos estudar a função energia potencial Eq. (59) na superfície da Terra. Para isso, vamos usar a aproximação linear local de $U(r)$ em $r = R$. Talvez você já tenha estudado em Cálculo como fazer uma aproximação linear local de uma função qualquer $f(x)$ em $x = x_0$. Esta aproximação é dada por

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{60}$$

em que $f'(x_0)$ é o mesmo que

$$\left(\frac{d}{dx}[f(x)]\right)_{x=x_0}$$

Como um exemplo, podemos considerar a função $f(x) = x^2$, e usar a aproximação linear ao redor do ponto $x_0 = 2$. Neste caso, teremos $f(x) \approx 4x - 4$. Veja na Figura 22 como a aproximação linear se compara com a função original ao redor do ponto $x_0 = 2$.

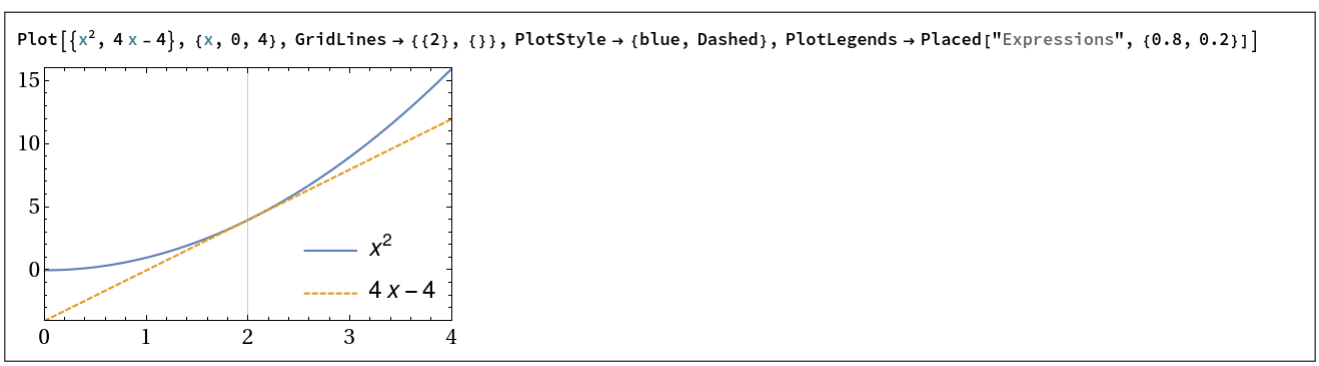


Figura 22: Exemplo de uma aproximação linear.

Podemos fazer o mesmo estudo com relação a função potencial gravitacional Eq. (59). Vamos expandir a função ao redor de $r = R + h$ (ou seja, ao redor de um ponto de altura h acima da superfície da Terra).

Neste caso teremos

$$U(r) \approx U(R+h) + \frac{GmM}{(R+h)^2}(r - R - h) \tag{61}$$

Tomando $r = R$ (podemos fazer isso contanto que $h \ll R$), obtemos

$$U(R+h) - U(R) \approx \frac{GmM}{(R+h)^2}h \approx \frac{GmM}{R^2}h \tag{62}$$

Usando a definição $g = GM/R^2$ podemos escrever

$$\boxed{U(R+h) - U(R) = mgh} \qquad (h \ll R) \tag{63}$$

que é a já conhecida diferença de energia potencial gravitacional próximo da superfície da Terra.

E Plot da função energia potencial de Lennard-Jones

```
σ = 0.263 × 10^-9;
ϵ = 1.51 × 10^-22;
U[x_] := 4 ϵ ((σ/x)^12 - (σ/x)^6)
Plot[1/10^-23 U[x 10^-10], {x, 2.5, 6}, PlotRange → {-20, 5}, Frame → True, PlotStyle → RGBColor[216/255, 123/255, 5/255],
 GridLines → Automatic,
 Prolog → {RGBColor[255/255, 243/255, 198/255], Rectangle[Scaled[{0, 0}], Scaled[{1, 1}]]},
 Method → {"GridLinesInFront" → True}, FrameLabel → {"x(m)× 10^-10", "U(J)× 10^-23"}]
```

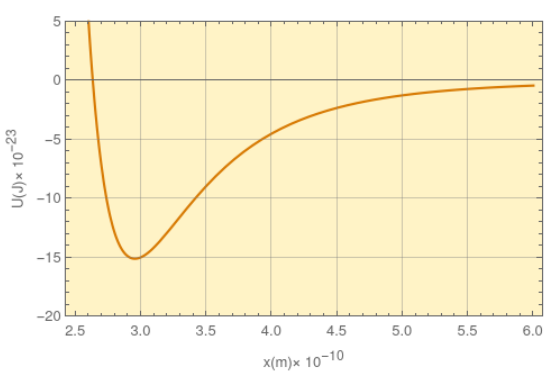


Figura 23: Gráfico do potencial de Lennard-Jones.

F Frequência das pequenas oscilações

Um dos sistemas mais estudados na física é o oscilador harmônico. O sistema massa-mola é um exemplo de um oscilador harmônico. De uma forma mais geral, dizemos que um sistema é um oscilador harmônico

se a energia potencial do sistema pode ser escrita na forma

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{64}$$

em que k é uma constante positiva. A partícula é atraída até a origem $x = 0$ por uma força restauradora dada por

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = -kx \tag{65}$$

Podemos encontrar a posição da partícula em função do tempo. Para isso, podemos partir da segunda lei de Newton para obter

$$F = ma \quad \Longrightarrow \quad -kx = m\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{66}$$

A Eq. (66) é uma equação diferencial. Sua solução pode ser escrita como

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{67}$$

em que A e ϕ são constantes e ω, a frequência angular de oscilação, é dado por

$$\omega = \sqrt{k/m} \tag{68}$$

A frequência ν (que é o inverso do período $\nu = 1/T$) se relaciona com a frequência angular por meio da relação

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{69}$$

Note que no caso em que o mínimo do potencial é deslocado para uma posição x_0, teríamos

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \tag{70}$$

o que nos levaria a uma equação do movimento da forma

$$x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \phi) \tag{71}$$

ou seja, a frequência de oscilação não se alteraria.

Um dos motivos pelo qual estudamos tanto o oscilador harmônico é porque muitos sistemas podem ser aproximados por um sistema com potencial harmônico. Considere, por exemplo, o potencial de Lennard-Jones mostrado na Figura 23. Note que, próximo do ponto de equilíbrio, a função potencial pode ser aproximada por um potencial harmônico. Para fazermos essa aproximação, temos de expandir o potencial de Lennard-Jones em torno de seu ponto mínimo x_0 usando a série de Taylor. Para expandir uma função $f(x)$ qualquer em torno de um ponto x_0 podemos usar a relação

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad \text{em que} \qquad a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right]_{x=x_0} \tag{72}$$

Podemos expandir o potencial de Lennard-Jones em torno da posição de equilíbrio x_0. Para isso, teremos

$$a_0 = U(x_0), \quad a_1 = U'(x_0), \quad a_2 = \frac{U''(x_0)}{4}, \quad \cdots \tag{73}$$

e o potencial (em torno da posição x_0) pode ser escrito como

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots \tag{74}$$

Desta forma, podemos fazer uma aproximação em segunda ordem para o potencial $U(x)$ em torno da posição x_0. Neste caso ficamos com

$$\begin{aligned} U(x) &\approx U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= \frac{U''(x_0)}{2}\left[x - \left(\frac{U''(x_0)x_0 - U'(x_0)}{U''(x_0)}\right)\right]^2 + \left(U'(x_0) - \frac{(U'(x_0))^2}{2U''(x_0)}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

Note que o potencial acima pode ser reescrito como

$$U(x) \approx \frac{1}{2}k'(x - x_0')^2 + c \tag{76}$$

em que

$$k' = U''(x_0), \qquad x_0' = \left(\frac{U''(x_0)x_0 - U'(x_0)}{U''(x_0)}\right), \qquad c = \left(U'(x_0) - \frac{(U'(x_0))^2}{2U''(x_0)}\right) \tag{77}$$

Por comparar a Eq. (76) com o potencial Eq. (70) talvez você já seja capaz de encontrar a frequência para pequenas oscilações ν.

Referências

[1] H. Nussenzveig, *Curso de física básica, 1: mecânica* (E. Blucher 2013).

[2] D. Zill and M. Cullen, *Equações diferenciais*, volume 1 (Pearson Makron Books 2001).

[3] K. Machado, *Equações diferenciais aplicadas à física* (Editora UEPG 1999).