Gabarito - T5

PVI : $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$; $x(0) = 0$, $y(0) = -2$

Na forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{F} = AF \,, \quad F = F(t)$$

O sistema de EDOs é da forma $\dot{F} = AF$, portanto , se a matriz A for diagonalizável , as soluções independentes serão do tipo :

$$F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t} \quad \begin{cases} \lambda_i \ldots \text{ autovalor de } A \\ \vec{v_i} \ldots \text{ autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$$

* A matriz A é diagonalizável ?

Autovalores : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 4)$

EC : $p(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \; ; \; \lambda_2 = 4$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\exists\ \underline{\underline{2}}$ autovetores LI ; $A_{2\times 2}$, então $\dim(V) = 2$.
Portanto , $\exists$ uma base de autovetores e A é diagonalizável.
Assim , a solução geral é CL de F_1 e de F_2 :

$$F(t) = c_1 F_1 + c_2 F_2 \quad , c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

Autovetores : SLH : $(A - \lambda_i I)\, \vec{v_i} = \vec{0}$, $\vec{v_i} = (x, y)$

$\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$, $y = -x$ $\therefore$ $\vec{v_1} = (x, -x) = x(1, -1)$

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow F_1 = \vec{v_1}\, e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma solução

$\lambda_2 = 4$: $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$, $y = x$ $\therefore$ $\vec{v_2} = (x, x) = x(1, 1)$

$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2 = \vec{v_2}\, e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$ é a outra solução

Escrevendo $F = F(t)$ como CL das soluções independentes:

$$F(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 e^{4t} \\ c_2 e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 e^{4t} \\ -c_1 + c_2 e^{4t} \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução geral do sistema de EDOs é:

$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{4t} \\ y(t) = -c_1 + c_2 e^{4t} \end{cases}$, c_1, c_2 ... constantes

Aplicando as condições iniciais do PVI, encontram-se as constantes:

$t = 0$

$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= -2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$

E a solução do PVI é:

$$x(t) = 1 - e^{4t}$$

$$y(t) = -1 - e^{4t}$$