AULAS ANTERIORES

09/12/2020

Sistema EDOs : $\dot{F} = A F$, $F = F(t)$ ... vetor de soluções independ.

A

Diagonalizável

$\forall \lambda_i,\ ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

$\exists$ base de autovetores

$A \sim D$

(Diagonalização de Operadores)

Soluções independentes : $F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t}$

$$\begin{cases} \lambda_i \text{ ... autovalor de } A \\ \vec{v_i} \text{ ... autovetor },\ \lambda_i \end{cases}$$

Solução Geral : CL

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(t)$$

conhecidas ... PVI

Não Diagonalizável

$\exists\, \lambda_i$ tal que $ma(\lambda_i) > mg(\lambda_i)$

$\nexists$ base de autovetores

$A \sim J$

(Forma de Jordan)

$A = P J P^{-1}$

$$\begin{cases} J = [\, T(\vec{e_i})_E \,] \\ P = [\, I \,]^E_C = [(\vec{e_i})_C] \end{cases}$$

$\dot{f} = a f \rightarrow f = e^{at}$

$\dot{F} = A F \rightarrow F = e^{At}$

Solução Geral :

e^{At}

$$F(t) = P e^{Jt} P^{-1} F_0$$

vetor de constantes (conhecidas ... PVI)

E se os autovalores $\in \mathbb{C}$?

A matriz A será diagonalizável para os EVs complexos e o método de obtenção das soluções independentes não se altera. Serão feitas modificações no ajuste dos autovalores e dos autovetores aos números complexos.

Slide 20 - Exercício 6

$$\begin{cases} \dot{x} = -9x + 19y + 4z \\ \dot{y} = -3x + 7y + z \\ \dot{z} = -7x + 17y + 2z \end{cases}$$; solução geral ?

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -9 & 19 & 4 \\ -3 & 7 & 1 \\ -7 & 17 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{F} \longrightarrow \boxed{\dot{F} = AF} \quad F = F(t)$$

Para sistemas de EDOs desse tipo, se A for diagonalizável, as soluções independentes serão do tipo

$$F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t} \quad \begin{cases} \lambda_i \dots \text{autovalor de } A \\ \vec{v_i} \dots \text{autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$$

A solução geral será $F = F(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, cujos elementos são as funções que solucionam o sistema.

A matriz A é diagonalizável?

Autovalores: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 1)$

$(\lambda^2 + 1) = 0$
$\lambda^2 = -1$
$\lambda = \pm\sqrt{-1}$
$\lambda = \pm i$

$EC: p(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \; ; \; \lambda_2 = i \; ; \; \lambda_3 = -i$

A tem ordem 3, logo $\dim(V) = 3$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \therefore$ garante-se que $\exists$ 3 autovetores LI e uma base de autovetores. Desta forma, A é diagonalizável.

Autovetores – SLH: $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$, $\vec{v_i} = (x, y, z)$

$\lambda_1 = 0 : (A - \lambda I)\vec{v_1} = \vec{0}$, $\vec{v_1} = z\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\vec{v_1} = (3, 1, 2)$ //

Nas raízes da EC $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, logo, o autovetor associado a ele também poderá ser complexo. Olhando para a conjugada da eq. $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, tem-se:

A ... matriz $\in \mathbb{R} \therefore$ não se altera

$\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}$

$\vec{v} \longrightarrow \bar{\vec{v}}$

CONCLUSÃO: para o autovalor conjugado $(\bar{\lambda})$, o autovetor também será o conjugado $(\bar{\vec{v}})$.

CONSEQUÊNCIA: não é necessário trabalhar com as 2 raízes complexas, pois uma das raízes será suficiente para produzir as 2 soluções independentes associados aos $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\lambda = i$: $(A - iI)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \gamma\left(\dfrac{71-10i}{53}, \dfrac{23-i}{53}, 1\right)$

$\vec{v} = (71 - 10i, 23 - i, 53)$

OBSERVAÇÃO:

Escrever a solução da EDO em termos de funções reais, ainda que o autovalor e o autovetor que a geram sejam complexos, só é possível utilizando a Fórmula de Euler. A solução da EDO será obtida a partir da seguinte função complexa:

$$z = \vec{v}\, e^{\lambda t} \quad \begin{cases} \lambda = a + bi \\ \vec{v} = c + di \end{cases}$$

$$\therefore \quad z = (c + di)\, e^{(a+bi)t} = (c+di)\, e^{at}\, e^{bt i}$$

Fórmula de Euler

$$z = (c+di)\, e^{at}\,(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)$$

Distributiva

$$z = \underbrace{\boxed{\left(c e^{at}\cos bt - d e^{at}\operatorname{sen} bt\right)}}_{Re(z)} + \underbrace{\boxed{\left(c e^{at}\operatorname{sen} bt + d e^{at}\cos bt\right)}}_{Im(z)}\, i$$

Do resultado acima são obtidas as duas soluções LI da EDO: parte real ($Re(z)$) e parte imaginária ($Im(z)$).

*** Se o conjugado $\bar{\lambda}$ tivesse sido usado para encontrar a função complexa z : $z = Re(z) - Im(z)$.

O sinal seria absorvido pelas constantes, portanto, tanto faz usar λ ou $\bar{\lambda}$.

Logo, a solução da EDO associada à parte complexa será:

$$F_c(t) = c_1\, Re(z) + c_2\, Im(z)$$

Assim:

$$z = \vec{v}\, e^{\lambda t}$$

$$z = \begin{bmatrix} 71-10i \\ 23-i \\ 53 \end{bmatrix} e^{it} = \left(\begin{bmatrix} 71 \\ 23 \\ 53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} i \right) (\cos t + i \,\text{sen}\, t)$$

F. Euler

decomposição do autovetor em $Re(\vec{v})$ e $Im(\vec{v})$

$$z = \left(\begin{bmatrix} 71 \\ 23 \\ 53 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen}\, t \right) + \left(\begin{bmatrix} 71 \\ 23 \\ 53 \end{bmatrix} \text{sen}\, t + \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) i$$

$Re(z)$ $Im(z)$

E a solução da EDO será CL das $\underline{\underline{3}}$ soluções independentes:

$F_1(t)$, $Re(z)$ e $Im(z)$:

$$F(t) = c_1 F_1(t) + c_2 Re(z) + c_3 Im(z)$$

$$F(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{0t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 71 \\ 23 \\ 53 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen}\, t \right)$$

$$c_3 \left(\begin{bmatrix} 71 \\ 23 \\ 53 \end{bmatrix} \text{sen}\, t + \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right)$$

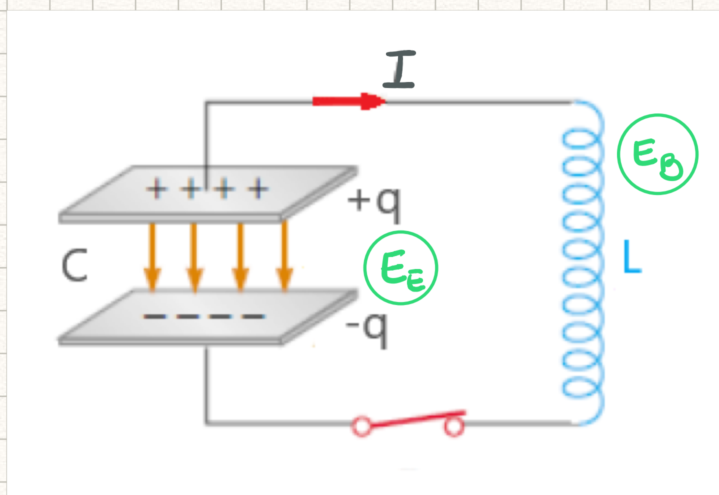
$$F(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 71 \cos t + 10 \,\text{sen}\, t \\ 23 \cos t + \text{sen}\, t \\ 53 \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 71 \,\text{sen}\, t - 10 \cos t \\ 23 \,\text{sen}\, t - \cos t \\ 53 \,\text{sen}\, t \end{bmatrix}$$

E a solução será:

$$\begin{cases} x(t) = 3c_1 + (71c_2 - 10c_3)\cos t + (10c_2 + 71c_3)\,\text{sen}\,t \\ y(t) = c_1 + (23c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + 23c_3)\,\text{sen}\,t \\ z(t) = 2c_1 + 53c_2\cos t + 53c_3\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

Slide 21 - Exercício 7

Circuito LC



Energia Elétrica em C: $E_E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$

Energia Magnética em L: $E_B = \dfrac{1}{2} L I^2$

$E = E_E + E_B$

↓

energia total... constante

Como ∄ resistência, E permanece constante. Logo:

$$\frac{dE}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left(L\frac{d(I^2)}{dt} + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}(q^2)\right) = 0$$

$$\cancel{2}LI\frac{dI}{dt} + \cancel{2}\frac{q}{C}\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{I} = 0$$

$$L\cancel{I}\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}\cancel{I} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0 \\ \dfrac{dq}{dt} = I \end{cases} \xrightarrow[\text{Homogêneas}]{\text{Sistema de EDOs}} \begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{q}{LC} \\ \dfrac{dq}{dt} = I \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ q \end{bmatrix}}_{F}, \quad \begin{matrix} I(0) = I_0 \\ q(0) = q_0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} I(t) \\ q(t) \end{matrix} \; ?$$

Para sistemas de EDOs do tipo $\dot{F} = AF$, a solução depende se A é ou não diagonalizável e se os autovalores são reais ou complexos.

A matriz A é diagonalizável ?

Autovalores : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \dfrac{1}{LC} = 0$

$$EC: p(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda = \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC}}}_{=b}\, i = \pm bi$$

A tem ordem 2, logo $\dim(V) = 2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\therefore$ garante-se que $\exists$ 2 autovetores LI e uma base de autovetores. Desta forma, A é diagonalizável. Para $\lambda \in \mathbb{C}$:

Autovetores - SLH : $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = (x, y)$

$\lambda = bi$: $(A - bi\, I)\vec{v} = \vec{0}$

$$(-bi) \quad \begin{bmatrix} -bi & -b^2 \\ 1 & -bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x - biy = 0 \\ x = biy \end{cases}$$

$$\vec{v} = (x, y) = y\,(bi, 1)$$

A função complexa da qual são tiradas as soluções independentes é dada por:

$$z = \vec{v}\, e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} bi \\ 1 \end{bmatrix} e^{(bi)t}$$

F. Euler

$$z = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} i \right) (\cos bt + i \,\mathrm{sen}\, bt)$$

$$z = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos bt - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{sen}\, bt \right)}_{Re(z)} + \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{sen}\, bt + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \cos bt \right) i}_{Im(z)}$$

A solução da EDO será CL de $Re(z)$ e $Im(z)$:

$$F(t) = c_1\, Re(z) + c_2\, Im(z)$$

$$F(t) = c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos bt - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{sen}\, bt \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{sen}\, bt + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \cos bt \right)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -b \,\mathrm{sen}\, bt \\ \cos bt \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} b \cos bt \\ \mathrm{sen}\, bt \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} I(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 b \,\mathrm{sen}\, bt + c_2 b \cos bt \\ c_1 \cos bt + c_2 \,\mathrm{sen}\, bt \end{bmatrix}$$

Aplicando as condições iniciais do PVI:

$$\begin{matrix} I(0) = I_0 \\ q(0) = q_0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} I_0 = c_2 b \\ q_0 = c_1 \end{cases} \therefore \quad \begin{matrix} c_1 = q_0 \\ c_2 = \dfrac{I_0}{b} \end{matrix}$$

Assim, a solução do PVI que o circuito LC define é:

$$\begin{cases} I(t) = -q_0 b \,\text{sen}\, bt + I_0 \cos bt \\ q(t) = q_0 \cos bt + \dfrac{I_0}{b} \,\text{sen}\, bt \end{cases}, \quad b = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$$

Slide 22 - Exercício 8

Sistema de EDOs (após modelagem matemática do massa-mola):

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{K}{m} u \\ \dfrac{du}{dt} = v \end{cases}, \quad \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DO PVI:

$$\begin{cases} v(t) = -u_0 \sqrt{\dfrac{K}{m}} \,\text{sen}\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}\, t\right) \\ u(t) = u_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{m}}\, t\right) \end{cases}$$