Aula 18 – Séries de Taylor com resto de Lagrange

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Ideia geral

- Usando derivada aproximamos localmente uma função da melhor forma possível com um polinômio de grau 1 (a reta tangente).
- Podemos conseguir aproximações melhores quando consideramos polinômios de grau maior.
- O grau do polinômio que usamos para aproximar localmente a função é o número de vezes que precisamos derivar a função.
- Podemos estimar o "erro" dessa aproximação.
- Quando esse erro tende a 0, à medida que o grau do polinômio tende a infinito, a função se escreve como uma série de potências.
- Essa série de potências tem um padrão, que chamamos de *fórmula de Taylor*.
- Escrevendo uma função como série de potências, fica mais fácil derivar e integrar.

Notação e nomenclatura

- Denotamos por $f^{(n)}$ a n-ésima derivada de f.
- Formalmente: $f^{(0)} = f$ e $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
- Se f pode ser escrita como uma série de potências, chamamos essa série de *expansão* de f em série de potências.
- Dizemos, também, que f *admite uma expansão em série de potências* (em torno de a).

Série de Taylor

Teorema 1

Se f admite uma expansão em série de potências em torno de a, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Isto é,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Definição 1

Se f é uma função de classe C^∞ e $a \in dom(f)$, chamamos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *de* **série de Taylor em a associada a f.**

Observação 1

Nem toda função coincide com sua série de Taylor associada, mesmo quando essa série convergir.

Exemplo 1

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Verifique que f é de classe C^∞, e que $f^{(n)} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, a série de Taylor associada a f centrada em 0 é a função indenticamente nula, e, portanto, converge em todo $\mathbb{R}$, mas não é igual a f.

Série de Maclaurin

- É o caso particular de uma série de Taylor centrada em 0.
- Isto é, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
- $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$.

Exemplo 2

Verifique que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é a série de Maclaurin da função* e^x.

Pergunta:

- Como saber se uma função coincide com sua série de Taylor?
- Isto é, se admite expansão em série de potências?
- Vimos que ser de classe C^∞ não é suficiente.
- A série de Taylor correspondente ser convergente também não basta.
- Iremos "estimar o erro" entre a função e uma aproximação da série de Taylor até o n-ésimo termo.
- Se esse erro tender a 0, então a função coincide com usa série de Taylor.

Polinômio de Taylor e Resto de Lagrange

- O polinômio de Taylor aproxima uma função localmente.
- É o truncamento da série de Taylor até o grau do polinômio que escolhemos.
- No caso do grau ser 1, o polinômio de Taylor coincide com a reta tangente.
- O resto de Lagrange é a diferença entre o polinômio de Taylor e a função.
- Se esse resto tende a 0, quando o grau do polinômio de Taylor tende a infinito, então a série de Taylor coincide com a função, no intervalo em que isso ocorre.

Definição 2

Se f é de classe C^n, chamamos $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ *de* **polinômio de Taylor de grau n de f em (torno de) a.**

Definição 3

Se f é de classe C^n, chamamos $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ *de* **resto de Lagrange de grau n de f em (torno de) a.**

Exemplo 3

Usando um software de gráficos, represente, em um mesmo plano cartesiano, as seguintes funções:

- e^x;
- *O polinômio de Taylor de grau 1 da função* e^x *centrado em* 1.
- *O polinômio de Taylor de grau 2 da função* e^x *centrado em* 1.

Analise o resultado.

Teorema 2

Seja $R_n(x)$ *o resto de Lagrange de grau* n *de* f *em* a*. Se* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$*, para cada* x *tal que* $|x-a| < R$*, então a função* f *admite expansão em série de Taylor em* a *para* $|x-a| < R$*.*

Observação 2

Quando isso acontece temos $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$*.*

Teorema 3 (Desigualdade de Taylor)

Se $|f^{(n+1)}(x)| < M$, quando $|x-a| \leq d$, então o resto de Lagrange $R_n(x)$ de grau n em a da função f satisfaz a seguinte desigualdade, quando $|x-a| \leq d$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Corolário 1

Suponha que para cada $d < R$ existe um número real $M(d)$ tal que $|f^{(n)}(x)| < M(d)$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [a-d, a+d]$. Então f admite expansão em série de Taylor em a com raio de convergência maior ou igual a R.

Exemplo 4

Mostre que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Fim