Resumo

Matriz de uma Transformação Linear e Matriz de Mudança de Base

Sabemos que se

$$V_1 \xrightarrow{T} V_2$$

$B \qquad\qquad C$

$$\begin{array}{cccc} T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \\ \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V_1

$C = \{u_1, \dots, u_m\}$ base de V_2

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$$

$$\boxed{A = (a_{ij}) = [T]_{B,C}}$$

Vale que (I)

$(v)_B = (x_1, \dots, x_n)$

$(T(v))_C = (y_1, \dots, y_m)$

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

Vale que

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 & \xrightarrow{S} & V_3 \\ B & & C & & D \end{array}$$

$B = \{v_1, ---, v_n\}$

$C = \{u_1, ---, u_m\}$

$D = \{w_1, ---, w_p\}$

$$\underset{p \times n}{[S \circ T]}_{B,D} = \underset{p \times m}{[S]}_{C,D} \underset{m \times n}{[T]}_{B,C} \quad (\text{II})$$

(produto de matrizes na mesma ordem em que se escreve a composição de funções)

Vamos utilizar essa fórmula para transformações matriciais de $\underset{can}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{T} \underset{can}{\mathbb{R}^n}$.

$can = \{e_1, ---, e_n\}$

$T(e_j) = a_{1j} e_1 + --- + a_{nj} e_n$

$(a_{ij}) = [T]_{can} = [T]_{can, can}$

Vale que

$$\boxed{T(x_1, ---, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}$$

Vale o seguinte

Para cada $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ podemos associar

$$A \in M_m(\mathbb{R}), \quad A = [T]_{can, can}.$$

Por outro lado, dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ podemos definir $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Temos então uma função bijetora φ

$$L(\mathbb{R}^n) = \{T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid T \text{ é linear}\} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$T \overset{\varphi}{\longmapsto} [T]_{can}$$

Assim, podemos pensar em transformações lineares de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como sendo matriz $A \in \mathbb{R}^n$

multiplicadas por $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$T(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = [T]_{can}.$$

DEF: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é <u>inversível</u> se existir uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$AB = BA = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, $B = A^{-1}$, inversa de A.

$$\boxed{\text{Vale que } T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ é inversível se, e somente se } A = [T]_{can} \text{ é inversível}}$$

(Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é inversível se existe S linear, $S: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid T \circ S = S \circ T = I$.)

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \iff T = T_A$, $A = [T]_{can}$

($\Leftarrow$) Se A é inversível então

$$(T_A \circ T_{A^{-1}})(x_1, \dots, x_n) = T_A(T_{A^{-1}}(x_1, \dots, x_n)) =$$

$$T_A\left(A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A\left(A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = (AA^{-1})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I_n\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, \dots, x_n).$$

$$= I(x_1, \dots, x_n).$$

Analogamente, $T_{A^{-1}} \circ T_A = I$.

($\Rightarrow$) Se T é inversível, seja S sua inversa e seja $B = [S]_{can}$

Então $\underset{\displaystyle \overset{\shortparallel}{I_n}}{[S \circ T]_{can}} = \underbrace{[S]_{can}}_{B} \underbrace{[T]_{can}}_{A}$ $\qquad AB = BA = I_n$

$[T \circ S]_{can} = \underbrace{[T]_{can}}_{A} \underbrace{[S]_{can}}_{B}$

Agora olhar a "matriz de mudança de base"

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$

queremos olhar como se relacionam as coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $(v)_B$ com $(v)_{can}$.

(No lugar de can poderia ser qualquer outra base.)

Seja $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a identidade

$[I]_B = I_n$, já que $I(v_j) = v_j = 0v_1 + \dots + 1v_j + \dots + 0v_n$.

$\underset{B}{I : \mathbb{R}^n} \longrightarrow \underset{can}{\mathbb{R}^n}$ $\quad [I]_{B,can} \quad I(v_j) = \alpha_{1j}e_1 + \dots + \alpha_{nj}e_n$

$\underset{can}{I : \mathbb{R}^n} \longrightarrow \underset{B}{\mathbb{R}^n}$ $\quad [I]_{can,B} \quad I(e_j) = \beta_{1j}v_1 + \dots + \beta_{nj}v_n$

$[I]_{B,can} = (\alpha_{ij})$ e $[I]_{can,B} = (\beta_{ij})$

Pela fórmula (I) na página 1

Se $(v)_{can} = (x_1, \ldots, x_n)$

$(I(v))_B = (v)_B = (y_1, \ldots, y_n)$

Então $(y_1, \ldots, y_n) = [I]_{can,B} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

e $(x_1, \ldots, x_n) = [I]_{B,can} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Pelo diagrama

$$\underset{can}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{I} \underset{B}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{I} \underset{can}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{I} \underset{B}{\mathbb{R}^n}$$

e pela fórmula (II) na página 2, temos que

$$\left.\begin{aligned} I_n &= [I]_{can} = [I \circ I]_{can} = [I]_{B,can}\,[I]_{can,B} \\ I_n &= [I]_B = [I \circ I]_B = [I]_{can,B}\,[I]_{B,can} \end{aligned}\right\}$$

I

Se $[I]_{B,can} = P$

então

$[I]_{can,B} = P^{-1}$

Note que a matriz $[I]_{B,can}$ é fácil de montar.

Se $\{v_1, \dots, v_n\} = B$, é só colocar as coordenadas de v_j na j-ésima coluna da matriz.

$$B = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(2,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,1,2)}_{v_3}\}$$

$$[I]_{B,can} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fazendo o diagrama e sabendo (II)

Agora, se temos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "I", "\text{fácil de montar}"'] & \underset{can}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "T", "\text{matriz conhecida}"'] & \underset{can}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "I"] & \underset{B}{\mathbb{R}^n} \end{tikzcd}$$

inversa da fácil de montar

Pela fórmula (II)

$$[I \circ T \circ I]_B = [I]_{can,B} [T]_{can} [I]_{B,can}$$

$$[I \circ T \circ I]_B = [T]_B$$

Vale que $[T]_B = P^{-1} A P$ onde

$$P = [I]_{B,can} \quad e \quad A = [T]_{can}$$

DEF: A matriz $N \in M_n(\mathbb{R})$ é semelhante à matriz M se existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que

$$P^{-1} M P = N.$$

Se N é semelhante a M então

$$M = P N P^{-1} = (P^{-1})^{-1} N P^{-1}.$$

Logo M e N são semelhantes

Observe que matrizes de uma mesma transformação linear em relação à bases distintas vão sempre ser semelhantes (pela fórmula II).

Proposição: matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.

(Isso decorre do fato de $\det(MN) = \det M \det N$ $\forall M, N \in M_n(\mathbb{R})$.)