

2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 41 E 42

OBJETIVOS: DISCUTIR CENÁRIOS FÍSICOS ONDE VALEM AS RELAÇÕES DE KRAMERS-KRONIG.

(CONT.) 4.6 CAUSALIDADE ...

NA AULA ANTERIOR, VIMOS QUE $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ MEROMÓRFICA, ANALÍTICA NA RETA REAL E NO SEMIPLANO COMPLEXO SUPERIOR, E TAL QUE $F(z) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, $z = x + iy$, SATISFAZ

$$F(x) = \frac{1}{\pi i} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx'$$

NA RETA REAL, ONDE $F(x) = u(x) + i v(x)$ E u E v CONSTITUEM UM PAR DE THs.

COMO RELACIONAR ISSO COM A FÍSICA? NA MAIORIA DAS ANÁLISES FÍSICAS "TRADICIONAIS", O "CAMINHO" É

PERCORRIDO NO SENTIDO INVERSO: AO INVÉS DE $F(z) \rightarrow F(x) \rightarrow (\mu(x), \nu(x))$, "A FÍSICA NOS LEVA" A UM PAR DE FUNÇÕES $(\mu(x), \nu(x))$ TAIS QUE $\nu = \mathcal{H}(\mu)$, $\mu = -\mathcal{H}(\nu)$, $F(x) = \mu(x) + i\nu(x)$ E $F(z)$ É OBTIDA POR UMA EXTENSÃO ANALÍTICA DE $F(x)$: $(\mu(x), \nu(x)) \rightarrow F(x) \rightarrow F(z)$.

MAS O EXEMPLO MAIS FAMOSO É "DIRETO". SEJA $G(t)$ UMA FUNÇÃO CAUSAL, TAL QUE $G(t) \equiv 0$ PARA $t < 0$, ALÉM DE SER "BEM COMPORTADA" ($G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, SEM SINGULARIDADES, ...). EXISTE $\tilde{G}(\omega)$:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(t) e^{+i\omega t} dt$$

NESTA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA, $\omega \in \mathbb{R}$ E $\tilde{G}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{G}(\omega) = \tilde{G}_R(\omega) + i\tilde{G}_I(\omega)$. MAS $\tilde{G}(\omega)$ PODE SER ESTENDIDA SEM PROBLEMAS

A $\tilde{G}(z)$, COM $z = \omega + i\gamma$, $\gamma > 0$, POIS → REAL!

$$\int_0^\infty G(t) e^{i(\omega + i\gamma)t} dt = \int_0^\infty G(t) e^{i\omega t} e^{-\gamma t} dt$$

CERTAMENTE EXISTE PARA $\gamma > 0$. ORA, AGORA $\tilde{G}(z)$ SATISFAZ EXATAMENTE AS CONDIÇÕES DE KRAMERS-KRONIG! SABEMOS, PORTANTO, QUE ANALÍTICA $\downarrow$ $\text{PI Im } z > 0$

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\pi i} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

OU, EQUIVALENTEMENTE, QUE

$$\begin{cases} \tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}_R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \tilde{G}_R(\omega) = +\frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}_I(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{cases}$$

AS PARTES REAL E IMAGINÁRIA DA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UMA FUNÇÃO CAUSAL SATISFAZEM AS RELAÇÕES DE KRAMERS-KRONIG.

SE $G(t)$ FOR REAL (COMO OCORRE NA MAIORIA DOS CASOS "NÃO QUÂNTICOS"),

$$\tilde{G}(-\omega) = \overline{\tilde{G}(\omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{G}_R(-\omega) + i \tilde{G}_I(-\omega) = \tilde{G}_R(\omega) - i \tilde{G}_I(\omega)$$

$$\therefore \begin{cases} \tilde{G}_R(-\omega) = +\tilde{G}_R(+\omega) & \text{PAR!} \\ \tilde{G}_I(-\omega) = -\tilde{G}_I(+\omega) & \text{ÍMPAR!} \end{cases}$$

NESSE CASO, É USUAL SIMPLIFICAR AS RKKs:

$$\tilde{G}_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{VP} \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right\} \frac{\tilde{G}_R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{VP} \int_0^{\infty} \tilde{G}_R(\omega') \left[\frac{1}{\omega' - \omega} - \frac{1}{\omega' + \omega} \right] d\omega'$$

$$\therefore \tilde{G}_I(\omega) = -\frac{2}{\pi} \omega \text{VP} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{G}_R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\tilde{G}_R(\omega) = +\frac{2}{\pi} \text{VP} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \cdot \tilde{G}_I(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

RELAÇÕES DE DISPERSÃO DE KK

04

$G(t)$ CAUSAL, CLARO, É UMA FUNÇÃO DE GREEN, MAS FISICAMENTE PODE CORRESPONDER A UMA CONDUTIVIDADE ELÉTRICA DEPENDENTE DO TEMPO $\sigma(t)$, OU A UMA SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA OU MAGNÉTICA $\chi(t)$, OU AINDA À UMA CONSTANTE DIELÉTRICA DE UM MATERIAL. AS RELAÇÕES DE KK SE ESTABELECEM NAS COMPONENTES REAL E IMAGINÁRIA DAS EXPRESSÕES DEPENDENTES DE FREQUÊNCIA DESSAS GRANDEZAS ($\chi(t) \rightarrow \chi(\omega)$
 $\overset{||}{\tilde{\chi}(\omega)}$).

A PARTE IMAGINÁRIA DE $\tilde{G}(\omega)$ ESTÁ ASSOCIADA A PROCESSOS DISSIPATIVOS / DISPERSIVOS, ONDE OCORRE PERDA DE ENERGIA / COERÊNCIA (DE UM PACOTE DE ONDAS, POR EXEMPLO), ENQUANTO A PARTE REAL CORRESPONDA A ABSORÇÃO DE ENERGIA.

JÁ VIMOS ALGO PARECIDO COM ISSO NAS
p. 05-06 DAS AULAS 37-38! NAQUELA
OCASIÃO, VIMOS QUE, PARA $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x - i\epsilon} dx = \begin{cases} e^{-k\epsilon}, & k > 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

E QUE

TF?

$H(k)$

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + \epsilon^2}}_{\epsilon \rightarrow 0^+ \downarrow \text{PV } \frac{1}{x}} + i \underbrace{\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}}_{\epsilon \rightarrow 0^+ \rightarrow \pi \delta(x)}$$

ABSOR-
ÇÃO

DISPERSÃO

ISSO SUGERE (PARA RIGOR, VER " LEMOS,
CONVITE À FÍSICA MATEMÁTICA, p. 301-303)

$$\mathcal{F} \left\{ \text{VP } \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \right\} = H(k) \cdot \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}$$

E, PELA SIMETRIA DA NOSSA CONVENÇÃO
DE FOURIER, QUE

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} H(x) \right\} = \text{VP } \frac{1}{\omega} + i\pi \delta(\omega)$$

VEMOS QUE A TF DE UMA FUNÇÃO CAU-
 SAL (A HEAVISIDE!) TEM UMA PARTE REAL
 "DE ABSORÇÃO" E UMA IMAGINÁRIA DISSI-
 PATIVA! VAMOS "REPRODUZIR" NOSSO RESUL-
 TADO SOBRE $\tilde{G}(\omega)$ DO INÍCIO DA AULA.

$$G(t) = G(t) \cdot H(t) \Rightarrow \tilde{G}(\omega) = \tilde{G}(\omega) * \tilde{H}(\omega) =$$

CONVOLUÇÃO NO SENTIDO INVERSO!
 SIMETRIA!!!

$$= \tilde{G}(\omega) * \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi i} \left[\text{VP} \frac{1}{\omega} + i\pi \delta(\omega) \right] \right\} = \text{IDENTI-DADE DE CONV.}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi i} \left[\tilde{G}(\omega) * \text{VP} \frac{1}{\omega} \right] + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[\tilde{G}(\omega) * \delta(\omega) \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right\} + \frac{1}{2} \tilde{G}(\omega)$$

DEFINIÇÃO DE
 CONVOLUÇÃO
 DEPENDENTE
 DA CONVENÇÃO
 DE FOURIER

$$\therefore \tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{\pi i} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{G}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

POR QUÊ? SINAL OPOSTO?!

CONVENÇÃO DE FOURIER
 AFETA O SEMIPLANO.

SOB O RISCO DE SER REPETITIVO, VOU APRESENTAR UM EXEMPLO FINAL, ONDE VOU APRESENTAR O FAMOSO SINAL ANALÍTICO, QUE TEM UMA REPRESENTAÇÃO CAUSAL NO DOMÍNIO DE FOURIER!!!

SEJA $f_R(t)$ UM "SINAL" REAL DE NOS SO INTERESSE. ELE É TUDO QUE NOS IMPORTA. PORÉM, PODE SER CONVENIENTE ANALÍTICA E/OU COMPUTACIONALMENTE ESTENDÊ-LO A UM SINAL ANALÍTICO COMPLEXO $f(t) = f_R(t) + i f_I(t)$, ONDE $f_I(t)$ SERÁ REDUNDANTE, MAS CONVENIENTE!

$$f_R(t) = \overline{f_R(t)} \Rightarrow \tilde{f}_R(-\omega) = \overline{\tilde{f}_R(+\omega)}$$

TODA A INFORMAÇÃO ESTÁ NA REGIÃO POSITIVA ($\omega > 0$) DO ESPECTRO.

DEFINE-SE $\tilde{f}(\omega) \equiv 2H(\omega) \cdot \tilde{f}_R(\omega)$.

QUEM É $f(t)$?

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ 2 H(\omega) \tilde{f}_R(\omega) \} =$$

$$= 2 \{ [\mathcal{F}^{-1}(H(\omega))](t) \} * f_R(t) =$$

$$= 2 \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi i} \left[\text{VP} \frac{1}{t} + i\pi \delta(t) \right] \right\} * f_R(t) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi i} \left(\text{VP} \frac{1}{t} \right) * f_R(t) + (\sqrt{2\pi} \delta(t)) * f_R(t) =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\pi i} \left\{ \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_R(t')}{t-t'} dt' \right\} + f_R(t)$$

$$= f_R(t) + i \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_R(t')}{t'-t} dt'.$$

VEREMOS QUE BASTA DESPREZARMOS $f_I(t)$
PARA RECUPERARMOS $f_R(t)$.

**MAIS UMA VEZ, SINAL OPOSTO,
RESQUÍCIO DA CONVENÇÃO
DE FOURIER...**