O TEOREMA DE POINCAR-BENDIXON

Consideremos novamente sistema autônomo não linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

sendo

$\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1 em um aberto contendo a origem e lembremos das definições

.

Definição 1. *Suponhamos que a solução $\phi(t,p)$ do sistema* (1) *com condição inicial $\phi(0,p) = p$ esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Nessas condições definimos:*

(1) *A órbita do sistema* (1) *passando por p, $\gamma(p) = \{x = \phi(t,p) : t \in \mathbb{R}\}$.*
(2) *A órbita positiva do sistema* (1) *passando por p, $\gamma^+(p) = \{x = \phi(t,p) : t \geq 0\}$.*
(3) *A órbita negativa do sistema* (1) *passando por p, $\gamma^-(p) = \{x = \phi(t,p) : t \leq 0\}$.*

Definição 2. *Nas mesmas condições da definição 1, definimos*

(1) *O conjunto ω-limite da órbita passando por p:*

$$\omega(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \textit{existe uma seguência}\, t_n \to +\infty \ \textit{t.q.}\ \phi(t_n,p) \to x.\}$$

.

(2) *O conjunto α-limite da órbita passando por p:*

$$\alpha(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \textit{existe uma seguência}\, t_n \to -\infty \ \textit{t.q.}\ \phi(t_n,p) \to x\}$$

.

Date: December 1, 2020.

Exemplo 3. *Se x_0 é um equilíbrio assintoticamente estável, então o ω-limite de qualquer ponto em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 será $\{x_0\}$.*

Exemplo 4.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2)sen\ \left(\frac{\pi}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2)sen\ \left(\frac{\pi}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \end{cases} \tag{2}$$

A equação em coordenadas polares fica:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{r} = r^3 sen\ \frac{\pi}{r} \end{cases}$$

Os círculos $r = 1/n$ são órbitas fechadas. Temos também

(1) $\dot{r} > 0$, *quando* $r > 1$.
(2) $\dot{r} < 0$, *quando* $\frac{1}{2m} < r < \frac{1}{2m-1}$, $\quad m = 1, 2, \cdots$.
(3) $\dot{r} > 0$, *quando* $\frac{1}{2m+1} < r < \frac{1}{2m}$, $\quad m = 1, 2, \cdots$.

Então os círculos de raio $1/n$ com n par são o conjunto $\omega-$limite de vizinhanças e os círculos de raio $1/n$ com n impar são o conjunto α-limite de vizinhanças. Cada círculo é α e ω-limite de seus pontos.

Exemplo 5. *O conjunto ω-limite não é necessariamente conexo. Na figura seguinte, temos $\omega(P) = \gamma(P_1) \cup \gamma(P_2)$.*

Exemplo 6. *Considere um sistema com* 3 *pontos de equilíbrio, sendo 2 pontos espirais instáveis e 1 ponto de sela, como segue:*

Neste caso, temos que o conjunto "em forma de oito, formado pelas duas órbitas e o ponto de sela, é o conjunto ω*-limite de todo ponto* P *fora do "oito". O laço direito do "oito" é o* ω*-limite de todo ponto* P *que está no interior do laço, exceto o ponto espiral lá contido. Analogamente para o laço esquerdo. O ponto de sela é o* ω*-limite e o* α*-limite das órbitas que formam o "oito".*

Teorema 7. *Se a órbita positiva* $\gamma^+(P)$ *é limitada, então o conjunto* ω*-limite de* P *satisfaz:*

(1) $\omega(P) \neq \emptyset$.
(2) $\omega(P)$ *é compacto.*
(3) $\omega(P)$ *é invariante.*
(4) $\omega(P)$ *é conexo.*
(5) $\omega(P)$ *atrai a solução* $\phi(t, P)$*, isto é* $\lim_{t\to\infty} dist(\phi(t, P), \omega(P)) = 0$.

Teorema 8. *(Poincaré-Bendixon) Suponhamos que* (1) *é um sistema* ***no plano****, que* $\gamma^+(P)$ *é uma semi-órbita positiva limitada e que* $\omega(P)$ *não contenha uma singularidade (ponto de equilíbrio). Então* $\omega(P)$ *é uma* ***órbita fechada****.*

Corolário 9. *Suponhamos* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *é aberto limitado e que qualquer solução que encontre* $\partial\Omega$ *permaneça em* Ω *a partir do tempo de encontro. Então, se* Ω *não contém singularidades, ela contém necessariamente, uma órbita fechada.*

Exemplo 10. *Consideremos o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(2x^2 + y^2 - 2)y - x. \end{cases} \tag{3}$$

e (3) *obtemos*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}(x^2 + y^2) = -(2x^2 + y^2 - 2)y^2.$$

Agora consideremos $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 3\}$*. No círculo de raio* 1 *obtemos* $\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}(x^2 + y^2) \geq 0$ *e no círculo de raio* 3 *obtemos* $\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}(x^2 + y^2) \leq 0$.

Daí, usando o Corolário (9) *concluímos que existe uma órbita fechada em* Ω.

Teorema 11. *(Critério negativo de Bendixon) Suponhamos que (1) é um sistema* ***no plano*** Ω *é um aberto simplesmente conexo. Se* $divF > 0$ *em* Ω *. Então o sistema não possui órbitas periódicas em* Ω*.*