

SME 141

Assunto: Equações Diferenciais

Aula EDO-4 – EDOs de 2ª ordem Não Homogêneas

Prof. Miguel Frasson

Dezembro de 2020

Resumo 2ª ordem

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{LH})$$

- ▶ O conjunto de soluções de (LH) é espaço vetorial de dim. 2.
- ▶ Em outras palavras, a **solução geral** de (LH) é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- ▶ soluções $e^{\lambda t} \rightarrow$ eq. característica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
- ▶ Caso 1: 2 raízes reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

- ▶ Caso 2: 1 única raiz real λ

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t}$$

- ▶ Caso 3: raízes complexas conjugadas... aula de hoje.
- ▶ EDOs de 2ª ordem não homogêneas: aula de hoje.

Raízes complexas conjugadas $\lambda = p \pm iq$

- ▶ $y_1 = e^{(p+iq)t} = e^{pt} e^{iqt}$,
 $y_2 = e^{(p-iq)t} = e^{pt} e^{-iqt}$ são soluções de (LH)
- ▶ ... mas o que é e^{iqt} ?

Exponencial complexa $e^{i\theta}$

► Séries de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

► Potências de i :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots$$

Exponencial complexa $e^{i\theta}$

► Série de $e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \dots \\&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots \\&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\&= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

► Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Partes real e imaginária de soluções complexas são soluções

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{LH})$$

- ▶ Suponha $y(t) = u(t) + iv(t)$ solução complexa de (LH)
- ▶ Queremos soluções reais para (LH)!
- ▶ $y = u + iv \implies y' = u' + iv' \implies y'' = u'' + iv''$
- ▶ Como y é solução:

$$\begin{aligned} 0 &= ay'' + by' + cy \\ &= a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) \\ &= \underbrace{(au'' + bu' + cu)}_{=0} + i \underbrace{(av'' + bv' + cv)}_{=0} \end{aligned}$$

- ▶ Portanto, $u = \Re y$ e $v = \Im y$ são soluções reais de (LH)

Se $\lambda = a + bi$ é raiz complexa da equação característica...

- ▶ $y = e^{\lambda t}$ é solução de (LH)

$$\begin{aligned}y &= e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at+ibt} \\&= e^{at} e^{ibt} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) \\&= \underbrace{e^{at} \cos(bt)}_{\text{parte real}} + i \underbrace{e^{at} \sin(bt)}_{\text{parte imag.}}\end{aligned}$$

- ▶ Portanto, $y_1 = e^{at} \cos(bt)$ e $y_2 = e^{at} \sin(bt)$ são soluções de (LH)
- ▶ (aula anterior) $W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = b \neq 0$
- ▶ $y_1 = e^{at} \cos(bt)$ e $y_2 = e^{at} \sin(bt)$ são duas soluções LI

Resumo: caso $\lambda = a + ib$ é raiz complexa

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (\text{LH})$$

- ▶ Eq. caract.: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ tem raiz complexa $\lambda = \alpha + i\beta$
- ▶ Escreva a solução complexa

$$z(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = \underbrace{e^{\alpha t} \cos(\beta t)}_{\text{parte real}} + i \underbrace{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}_{\text{parte imag.}}$$

- ▶ Parte real é uma solução real: $y_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$
- ▶ Parte imaginária é outra solução real: $y_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- ▶ São soluções LI
- ▶ Solução geral:

$$y = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Exemplo: resolva $y'' + 2y' + 2y = 0$

- ▶ Eq. característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
- ▶ $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 \implies \sqrt{\Delta} = 2i$
- ▶ $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -1 \pm i$
- ▶ Tome uma raiz complexa: $\lambda = -1 + i$
- ▶ Solução complexa:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(-1+i)t} = e^{-t} e^{it} = e^{-t} (\cos t + i \sin t) \\ &= \underbrace{e^{-t} \cos t}_{\text{parte real}} + i \underbrace{e^{-t} \sin t}_{\text{parte imag.}} \end{aligned}$$

- ▶ Soluções reais: parte real e parte imaginária de $z(t)$

$$y_1 = e^{-t} \cos t, \quad y_2 = e^{-t} \sin t$$

- ▶ Solução geral: $y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$

Exemplo: resolva o PVI $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

- ▶ Eq. característica: $\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda^2 = -1 \implies \lambda = \pm i$
- ▶ Tome uma raiz complexa: $\lambda = i$
- ▶ Solução complexa:

$$z(t) = e^{it} = \underbrace{\cos t}_{\text{parte real}} + i \underbrace{\sin t}_{\text{parte imag.}}$$

- ▶ Solução geral: $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$
- ▶ Usando condições iniciais: $1 = y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$
- ▶ $y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \implies$
 $-1 = y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \implies c_2 = -1$
- ▶ Solução do PVI: $y(t) = \cos t - \sin t$

Resumo até aqui: resolvemos a HOMOGÊNEA

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{LH})$$

- ▶ Equação característica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
- ▶ Caso 1: 2 raízes reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$
 - ▶ $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
 - ▶ Solução geral de (LH): $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- ▶ Caso 2: 1 única raiz real λ
 - ▶ $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = te^{\lambda t}$
 - ▶ Solução geral de (LH): $y = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$
- ▶ Caso 3: raízes complexas conjugadas $\lambda = p \pm q$
 - ▶ solução complexa: $z(t) = e^{\lambda t} = \dots = e^{pt} \cos qt + ie^{pt} \sin qt$
 - ▶ $y_1 =$ parte real de $z(t)$: $y_1 = e^{at} \cos(bt)$
 - ▶ $y_2 =$ parte imaginária de $z(t)$: $y_2 = e^{at} \sin(bt)$
 - ▶ Solução geral de (LH): $y = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$

EDOs não homogêneas

Contando o final da história antes. . .

$$ay'' + by' + cy = h(t) \quad (L)$$

- ▶ Chamamos de **homogênea associada** à EDO

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (HA)$$

- ▶ Sejam y_1 e y_2 soluções LI da homogênea associada.
- ▶ Seja y_p uma solução qualquer de (L), que chamamos de **solução particular**
- ▶ A solução geral de (L) é a soma da **solução geral da homogênea** com a **solução particular**, isto é,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

Vamos mostrar isso...

Passos:

- ▶ Se y e w são soluções de (L),
a diferença $z = y - w$ é solução de (HA) → próximo slide
- ▶ Então $z = c_1 y_1 + c_2 y_2$
(pois essa é a forma das soluções da homogênea)
- ▶ Então $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + w$
- ▶ Como y é arbitrária, concluímos que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + w$ é a forma de todas as soluções!
- ▶ Apenas chamamos w de y_p :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

$z = y - w$ é solução da homogênea

- ▶ Sejam y e w soluções de (L):

$$ay'' + by' + cy = h(t)$$

$$aw'' + bw' + cw = h(t)$$

- ▶ Fazendo $z = y - w$ e subtraindo as equações:

$$\underbrace{a(y'' - w'')}_{z''} + \underbrace{b(y' - w')}_{z'} + \underbrace{c(y - w)}_z = h(t) - h(t) = 0$$

- ▶ Portanto,

$$az'' + bz' + cz = 0$$

isto é, z é solução da homogênea associada.

RESUMO

$$ay'' + by' + cy = h(t) \quad (L)$$

1. Resolva a homogênea associada (HA): ache y_1 e y_2 (já estudamos)
2. Ache uma solução particular y_p de (L) (a seguir)
3. Solução geral:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

Exemplo 1: $y'' + 5y' + 6y = 12$

1. Resolver a homogênea

► Homogênea associada: $y'' + 5y' + 6y = 0$

► Equação característica:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

► $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = e^{-3t}$

2. Achar uma solução particular

► por inspeção, note que $x_p = 2$ é uma solução

3. Solução geral:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 2$$

Métodos para encontrar soluções particulares

1. Método da Variação dos Parâmetros (esta aula)

Vantagem fácil de explicar e aplicar
serve para todas as EDOs

Desvantagem resolver integrais

2. Método dos Coeficientes a Determinar (não estudaremos)

Vantagem Contas fáceis, apenas contas algébricas

Desvantagem Muitos casos
Algumas EDOs simples

Método da Variação dos Parâmetros

Motivação:

- ▶ Aproveitar que as soluções da homogênea são LI, portanto

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall t$$

- ▶ Se montássemos um sistema com essa matriz de coeficientes, esse sistema sempre tem solução
- ▶ Esse método se aproveita disso para calcular y_p da forma

$$y_p = u_1(t)y_1 + u_2y_2$$

onde u_1, u_2 são funções (não constantes) que temos que descobrir

Derivando $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

- ▶ $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ (2 termos)
- ▶ $y'_p = u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2$ (4 termos)
- ▶ Dessa forma, y''_p terá 8 termos (é ruim)
- ▶ Faremos uma **simplificação** (a 1ª linha de nosso sistema)

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$$

- ▶ Com a simplificação

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

- ▶ $y''_p = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2$

Substituindo as derivadas em (L)

$$\begin{aligned}h(t) &= ay_p'' + by_p' + cy_p \\&= a(u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'') \\&\quad + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2)\end{aligned}$$

agrupando termos com u_1 , u_1' , u_2 , u_2'

$$\begin{aligned}&= u_1'(ay_1') + u_2'(ay_2') \\&\quad + u_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0}\end{aligned}$$

Portanto

$$u_1'(ay_1') + u_2'(ay_2') = h(t) \implies u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{h(t)}{a}$$

Das duas equações formamos um sistema

- ▶ u'_1 e u'_2 satisfazem as equações

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (\text{simplificação})$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = \frac{h(t)}{a} \quad (\text{eq. anterior})$$

- ▶ Montamos o sistema (que sempre tem solução)

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t)/a \end{pmatrix}$$

- ▶ Resolvendo o sistema, achamos u'_1 e u'_2
- ▶ Integrando essas funções, achamos u_1 e u_2
- ▶ Pronto! $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.

RESUMO: Método da Variação dos Parâmetros

1. Forma de y_p : $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

2. Sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t)/a \end{pmatrix}$$

3. Resolver o sistema para achar u_1' e u_2'

4. Integrar para achar u_1 e u_2

Retomando o exemplo: $y'' + 5y' + 6y = 12$

1. Resolver a homogênea

$$y_1 = e^{-2t}, \quad y_2 = e^{-3t}$$

2. Achar y_p pelo Método da Variação dos Parâmetros

► $a = 1, h(t) = 12.$

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3. Solução geral:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 2$$

Retomando o exemplo: $y'' + y = \sec t$

1. Resolver a homogênea

$$y_1 = \cos t, \quad y_2 = \sin t$$

2. Achar y_p pelo Método da Variação dos Parâmetros

► $a = 1, h(t) = \sec t.$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan t \\ 1 \end{pmatrix}$$

► $u_1 = -\int \tan t = \ln |\cos t| + \cancel{C_1}^0, \quad u_2 = t + \cancel{C_2}^0$

► $y_p = \cos t \times \ln |\cos t| + t \sin t$

3. Solução geral:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \cos t \times \ln |\cos t| + t \sin t$$