MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

4.1.2 Com Deslocamento Inicial Nulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Dividindo-se por $a^2 X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias, uma com condições de fronteira e a outra com condição inicial:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(L) = 0 & (4.7) \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(0) = 0 & (4.8) \end{cases}$$

As condições $X(0) = X(L) = 0$ decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = u(L,t) = X(L)T(t).$$

A condição $T(0) = 0$, decorre do fato de que o deslocamento inicial é nulo, ou seja,

$$0 = u(x,0) = X(x)T(0).$$

A equação (4.7) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

e tem soluções fundamentais

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação (4.8) obtemos

$$T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

Para resolver esta equação temos que encontrar as raízes da sua equação característica:

$$r^2 + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\frac{an\pi}{L}i.$$

Logo a solução geral da equação diferencial para $T(t)$ é

$$T(t) = c_1 \cos \frac{an\pi t}{L} + c_2 \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}.$$

Usando a condição inicial $T(0) = 0$ concluímos que a equação diferencial para $T(t)$ com a condição inicial $T(0) = 0$ tem soluções fundamentais (verifique!)

$$T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad u(x,0) = 0, \ 0 < x < L \end{cases} \tag{4.9}$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.10}$$

chamadas **modos normais (ou naturais) de vibração, ondas estacionárias** ou **harmônicos** e o seu período fundamental na variável x é igual a $\frac{2L}{n}$ e é chamado **comprimento de onda** do modo normal. Os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitude variando de forma senoidal $R_n(t) = \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$ com frequências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **frequências naturais** da corda. Portanto, neste caso, os períodos fundamentais da corda são $T_n = \frac{2L}{na}$. Observe, também, que cada modo normal $u_n(x,t)$ tem $n-1$ pontos fixos no intervalo $0 < x < L$ (quais são?).

Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira seja uma série da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}. \qquad (4.11)$$

Para satisfazer a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, devemos ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \tag{4.12}$$

Esta é a série de Fourier de senos de $g(x)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada g' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

para cada x, é periódica com relação a t com período fundamental $T = \frac{2L}{a}$, se $c_1 \neq 0$.

Exemplo 4.2. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} x/10, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ 4 - x/10, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

a=2, L = 40

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20}c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, que são os coeficientes obtidos para $f(x)$ do Exemplo 4.1 na página 341 dividos por 10, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{n\pi}{20}c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx \\
&= \frac{16 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}\; n = 1,2,3\ldots
\end{aligned}$$

$$c_n = \frac{320 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3},\; n = 1,2,3\ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{320}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20} \\
&= \frac{320}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi t}{20}
\end{aligned}$$

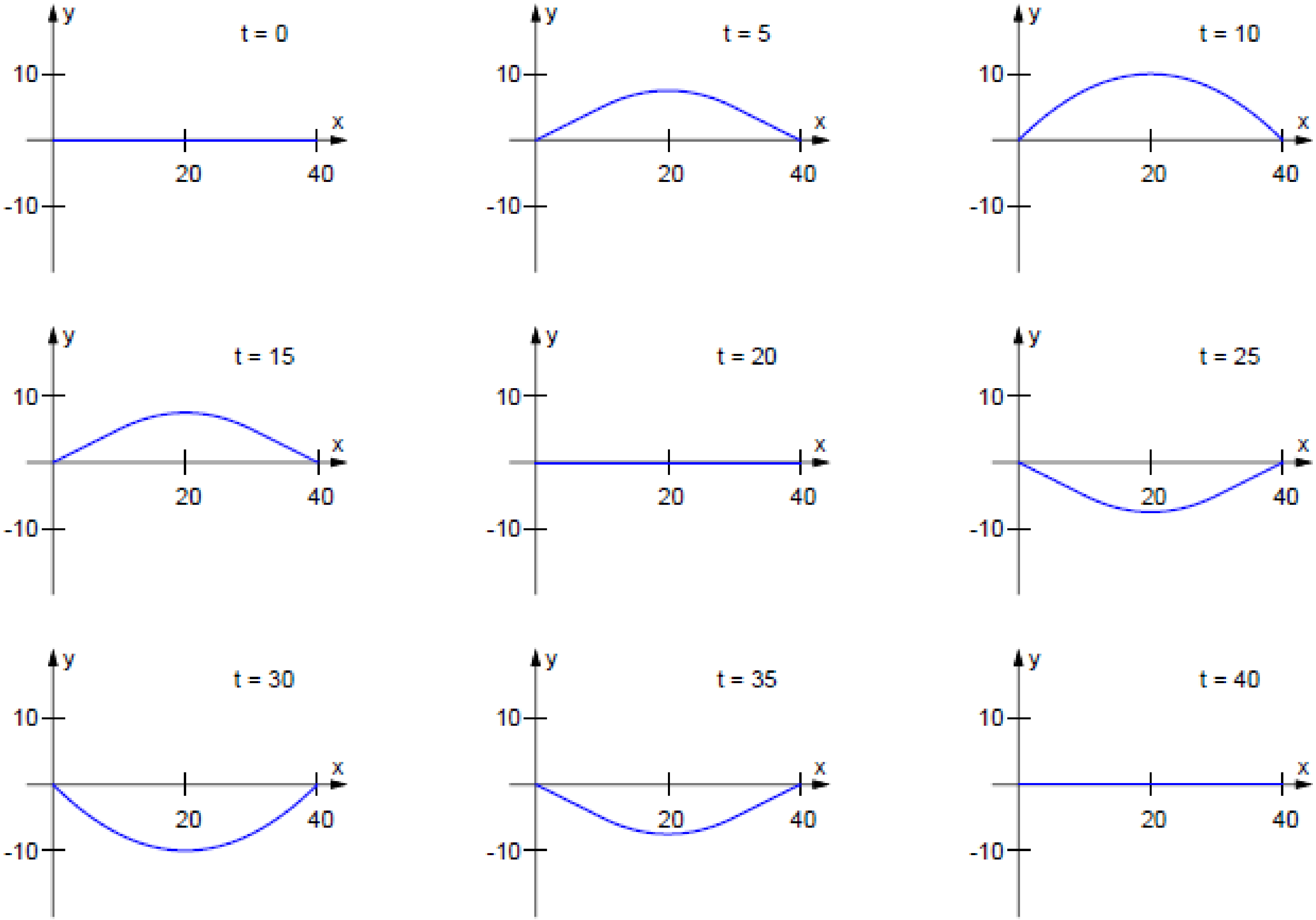


Figura 4.6 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.2.

1.5. Determine o deslocamento, $u(x,t)$, de uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial nulo solta de forma que a velocidade inicial seja dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 10, & \text{se } 10 \leq x < 30 \\ 40 - x, & \text{se } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R},\ -1 \le c < d \le 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(0)}_{c,d}, L) = d - c$ $a_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\text{sen}\, s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(1)}_{c,d}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f^{(1)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\ \text{sen}\, s + \cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(1)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\, s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f^{(2)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(2)}_{c,d}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f^{(2)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2 - 2)\,\text{sen}\, s + 2s\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(2)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\text{sen}\, s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$

1.5. Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\frac{n\pi}{20} c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

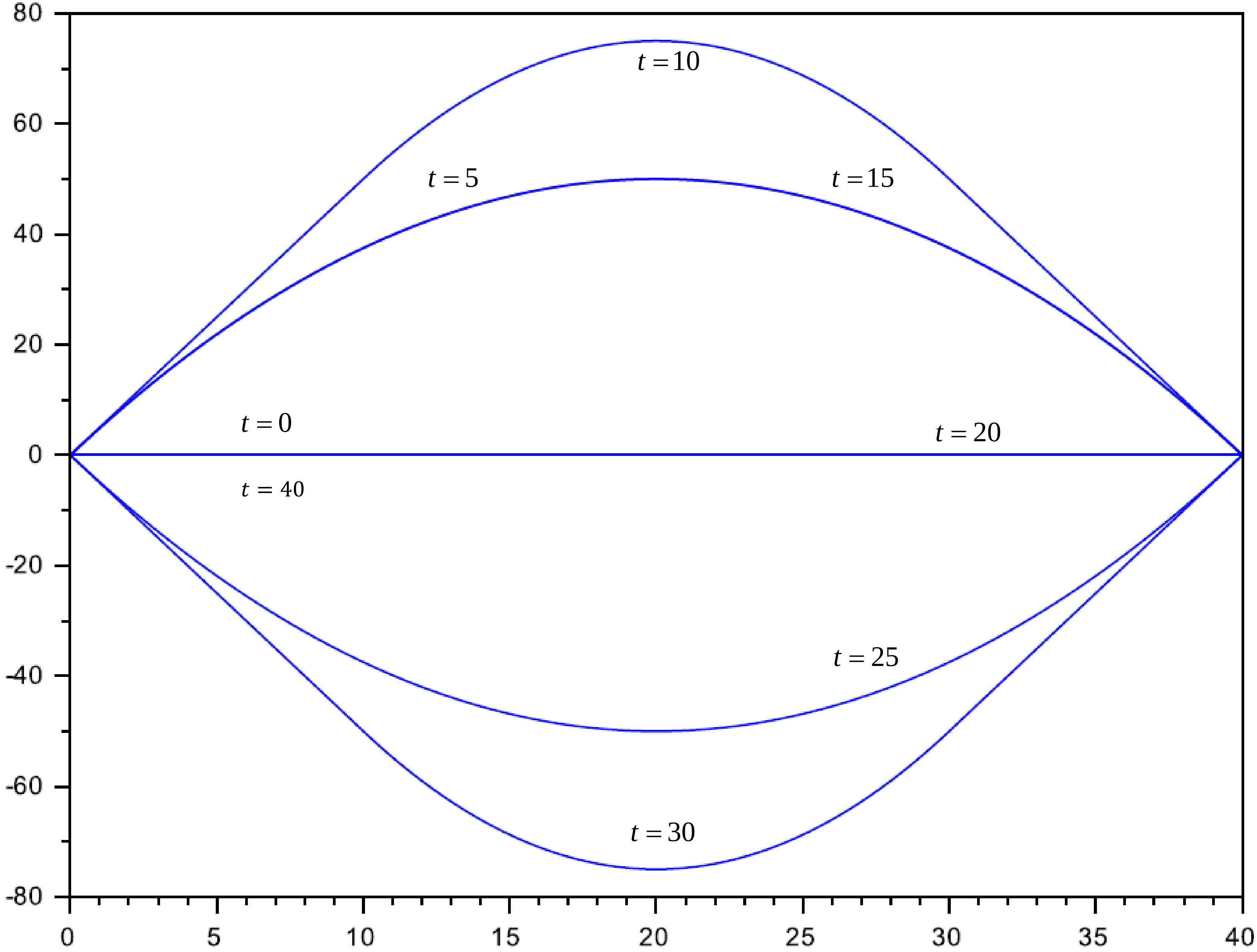
$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{20} c_n &= \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40}) dx \\ &= \frac{80}{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \ n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1600}{\pi^3} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3}, \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{1600}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

```
//Exercício 1.5
m=100; L =40;
x=linspace(0,1,m+1)*L
nk=100
t=30
a=2
u = zeros(m+1)
for n = 1:nk
    cn= 2*L*L*(sin(n*%pi/4)+sin(3*n*%pi/4))/(a*n^3*%pi^3)
    u = u + cn*sin(n*%pi*x/L)*sin(n*a*%pi*t/L)
end
plot(x,u)
```



80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
0
5
10
15
20
25
30
35
40
$t = 10$
$t = 5$
$t = 15$
$t = 0$
$t = 20$
$t = 40$
$t = 25$
$t = 30$

4.1.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Como observamos anteriormente a solução deste problema é a soma da solução do problema com apenas $f(x)$ não nula, que vamos denotar por $u^{(f)}(x,t)$, com a solução do problema com apenas $g(x)$ não nula, $u^{(g)}(x,t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{na\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{na\pi t}{L} \end{aligned}$$

em que c_n e $\frac{na\pi}{L} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

$$\frac{na\pi}{L} d_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,\ n = 1,2,3\ldots$$

Para cada x, a solução, $u(x,t)$, é periódica com relação a t com período $T = \frac{2L}{a}$.
As funções

$$u_n(x,t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{na\pi t}{L} + d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{na\pi t}{L}$$

são chamadas **modos normais (ou naturais) de vibração, ondas estacionárias ou harmônicos.** Substituindo-se $(c_n, d_n) = (R_n \cos \delta_n, R_n \operatorname{sen} \delta_n)$ os harmônicos podem ser escritos como (verifique!)

$$u_n(x,t) = \left[R_n \cos \left(\frac{na\pi t}{L} - \delta_n \right) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

amplitude varia no tempo

Portanto, os modos normais de vibração podem ser vistos como senos com amplitudes $R_n \cos\left(\frac{na\pi t}{L} - \delta_n\right)$ e frequências $\frac{an\pi}{L}$ chamadas **frequências naturais** da corda. Logo os períodos fundamentais são $T_n = \frac{2L}{na}$. Cada modo normal $u_n(x,t)$ tem $n-1$ pontos fixos no intervalo $0 < x < L$ (quais são?).

$$R_n^2 = c_n^2 + d_n^2$$

amplitude máxima

$$\omega_n = \frac{na\pi}{L}$$

frequência

$$\tan \delta_n = \frac{d_n}{c_n}$$

fase

Exemplo 4.3. Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ e com uma velocidade inicial $g(x)$ dados por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 20, \\ 40 - x, & \text{se } 20 \le x \le 40, \end{cases} \quad g(x) = \frac{f(x)}{10}.$$

a=2, L = 40

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é a soma das soluções dos problemas dados nos Exemplos 4.1 e 4.2, ou seja,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que c_n e $\frac{n\pi}{20} d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, ou seja,

$$c_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\frac{n\pi}{20} d_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} dx = \frac{16 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$d_n = \frac{320 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Portanto a solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20}+\frac{320}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20} \\
&= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20} \\
&\quad + \frac{320}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{20}
\end{aligned}
$$

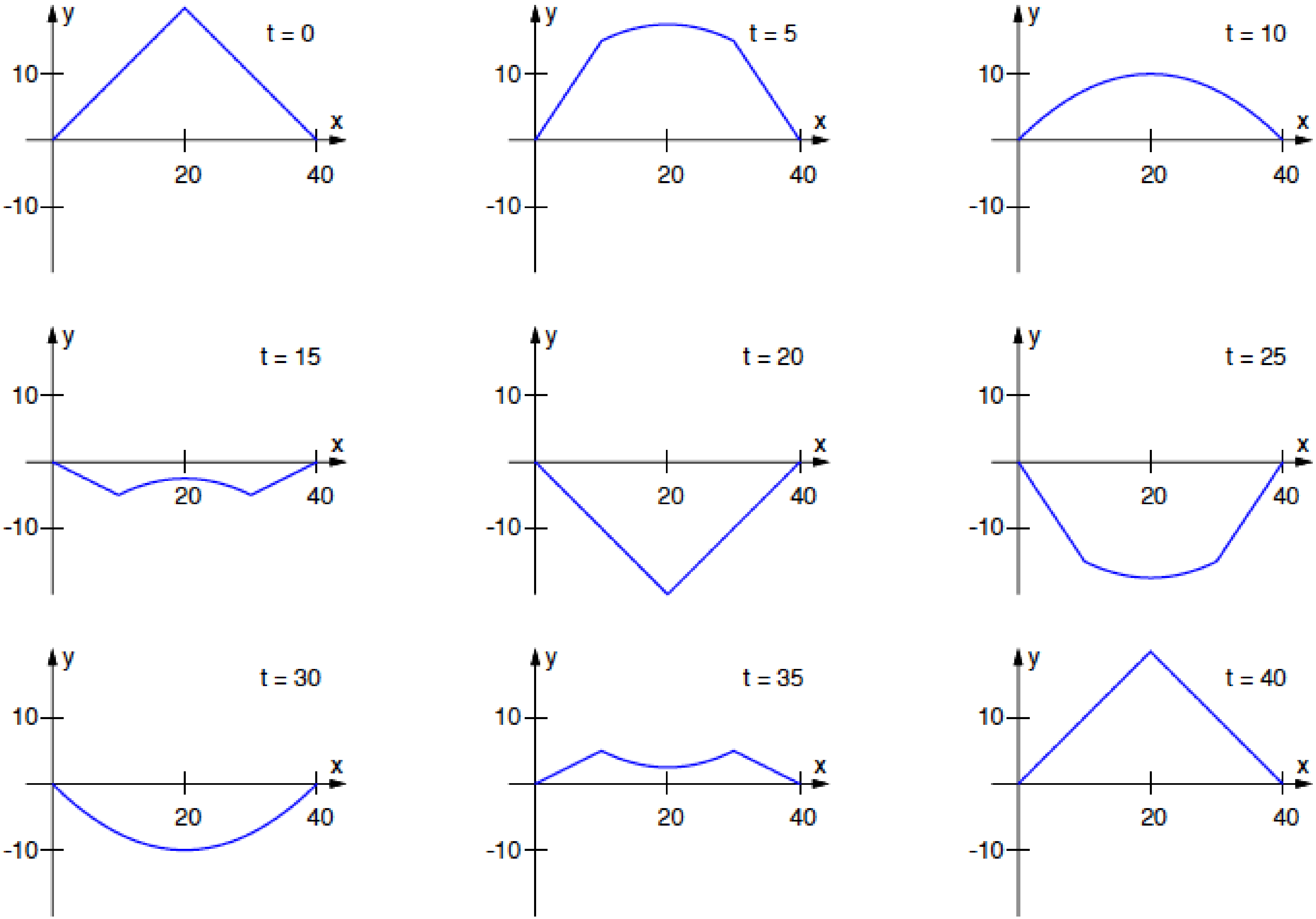


Figura 4.7 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 4.3.

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- **Equação da onda (hiperbólica)**