

SEL-EESC-USP

*BIT*  
*Modelo de*  
*Gummel-Poon*

P. R. Veronese  
2013

## Introdução

A partir da década de 1970 a Engenharia Eletrônica de semicondutores começou a sofrer grande avanço em ensino e em pesquisa. Projetos e desenvolvimentos de circuitos integrados de alto desempenho tornaram-se, portanto, iminentes. Para que esse fim fosse alcançado, no entanto, ferramentas adequadas tiveram que ser desenvolvidas. Uma ferramenta fundamental criada nessa época foi o programa de simulação de circuitos eletrônicos conhecido como *SPICE* (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis), desenvolvido na Universidade da Califórnia, Berkeley, sem o qual a verificação e a otimização de projetos de circuitos, com média e alta escala de integração, torna-se praticamente impossível [1]. Um programa de simulação só pode ser eficiente e confiável, no entanto, se os modelos usados para retratar os componentes elétricos e eletrônicos forem consistentes. Para o transistor bipolar de junção (*BJT*) o modelo escolhido foi o de Gummel-Poon, com 57 parâmetros de modelagem [2]. Esse modelo, embora não absolutamente perfeito, é bastante abrangente e preciso para as necessidades da eletrônica analógica bipolar moderna e vem sofrendo melhorias e atualizações ao passar dos anos, conforme as evoluções tecnológicas vão exigindo [3]. Com o aparecimento da tecnologia bipolar de silício-germânio (SiGe), usada na fabricação de transistores bipolares de alta velocidade para uso em micro-ondas, um novo modelo, conhecido como *VBIC*, precisou ser desenvolvido para suprir as lacunas do modelo de Gummel-Poon nessa região de funcionamento [4]. Esse modelo não é, todavia, totalmente novo, mas sim uma extensão adequada do modelo de Gummel-Poon. Uma visão abrangente sobre modelagem em geral pode ser conferida na literatura especializada [5].

## Referências

1. L. W. Nagel, "SPICE2: A Computer Program to Simulate Semiconductor Circuits," *Electronics Research Laboratory*, Rep. No. **ERL-M520**, University of California, Berkeley, 1975.
2. H. K. Gummel, H. C. Poon, "An Integral Charge Control Model of Bipolar Transistor," *Bell Syst. Tech. J.*, **49**, 827, 1970.
3. G. M. Kull, L. W. Nagel, S. W. Lee, P. Lloyd, E. J. Prendergast, and H. K. Dirks, "A Unified Circuit Model for Bipolar Transistor Including Quasi-Saturation Effects," *IEEE Transactions on Electron. Devices*, **ED-32**, 1103-1113, 1985.
4. Xiaochong Cao, J. McMacken, K. Stiles, P. Layman, J. J. Liou, A. Ortiz-Conde, S. Moinian, "Comparison of the New VBIC and Conventional Gummel-Poon Bipolar Transistor Models," *IEEE Transactions on Electron. Devices*, **47**, n° 2, Feb. 2000.
5. P. Antognetti, G. Massobrio, *Semiconductor Device Modeling with SPICE*, McGraw-Hill Int. Ed., Singapore, 1988, Cap. 2.

## Modelo de Gummel-Poon

### 1. Parâmetros de Modelagem do BJT

Parâmetro		Descrição	Unidade	Default
<b>AF</b>	$A_F$	Expoente de Ruído <i>Flicker</i>	-	1
<b>BF</b>	$\beta_F$	Ganho de Corrente Direto Ideal Máximo	-	100
<b>BR</b>	$\beta_R$	Ganho de Corrente Reverso Ideal Máximo	-	1
<b>CJC</b>	$C_{JC}$	Capacitância B-C com Polarização Zero	F	0
<b>CJE</b>	$C_{JE}$	Capacitância B-E com Polarização Zero	F	0
<b>CJS</b>	$C_{JS}$	Capacitância C-S com Polarização Zero	F	0
<b>EG</b>	$E_G$	Energia de <i>Gap</i> (Altura da Barreira)	eV	1,11
<b>FC</b>	$FC$	Coefficiente da Capacitância de Depleção	-	0,5
<b>GAMMA</b>	$\gamma$	Fator de Dopagem da Região Epitaxial	-	10p
<b>IKF</b>	$I_{KF}$	Início do Efeito Kirk de Alta Injeção Direta	A	$\infty$
<b>IKR</b>	$I_{KR}$	Início do Efeito Kirk de Alta Injeção Reversa	A	$\infty$
<b>IRB</b>	$I_{RB}$	Corrente de Base na qual $r_{BB}=R_B/2$	A	$\infty$
<b>IS</b>	$I_S$	Corrente de Transporte	A	0,1f
<b>ISC</b>	$I_{SC}$	Corrente de Saturação Reversa B-C	A	0
<b>ISE</b>	$I_{SE}$	Corrente de Saturação Reversa B-E	A	0
<b>ISS</b>	$I_{SS}$	Corrente de Saturação Reversa C-S	A	0
<b>ITF</b>	$I_{TF}$	Dependência de $I_C$ do Tempo de Trânsito	A	0
<b>KF</b>	$K_F$	Coefficiente de Ruído <i>Flicker</i>	-	0
<b>MJC</b>	$m_{JC}$	Fator de Gradualidade da Junção B-C	-	0,333
<b>MJE</b>	$m_{JE}$	Fator de Gradualidade da Junção B-E	-	0,333
<b>MJS</b>	$m_{JS}$	Fator de Gradualidade da Junção C-S	-	0
<b>NC</b>	$N_C$	Coefficiente de Emissão do Diodo B-C	-	2,0
<b>NE</b>	$N_E$	Coefficiente de Emissão do Diodo B-E	-	1,5
<b>NF</b>	$N_F$	Coefficiente de Emissão Direta	-	1,0
<b>NK</b>	$N_K$	Coefficiente de Início do Efeito da Alta Injeção	-	0,5
<b>NR</b>	$N_R$	Coefficiente de Emissão Reversa	-	1,0
<b>NS</b>	$N_S$	Coefficiente de Emissão do Diodo C-S	-	1,0
<b>PTF</b>	$P_{TF}$	Excesso de Fase @ $1/(2\pi\tau_F)$	°	0
<b>QCO</b>	$Q_{CO}$	Fator de Carga da Região Epitaxial	C	0
<b>RB</b>	$R_B$	Valor Máximo da Resistência Intrínseca de Base	$\Omega$	0
<b>RBM</b>	$R_{BM}$	Valor Mínimo da Resistência Intrínseca de Base	$\Omega$	$R_B$
<b>RC</b>	$r_C$	Resistência Intrínseca de Coletor	$\Omega$	0
<b>RCO</b>	$r_{CO}$	Resistência Intrínseca da Região Epitaxial	$\Omega$	0
<b>RE</b>	$r_E$	Resistência Intrínseca de Emissor	$\Omega$	0
<b>TF</b>	$\tau_F$	Tempo de Trânsito Ideal Direto	s	0
<b>TIKF1</b>	$T_{IKF1}$	Coefficiente Linear de Temperatura de $I_{KF}$	°C <sup>-1</sup>	0
<b>TIKF2</b>	$T_{IKF2}$	Coefficiente Quadrático de Temperatura de $I_{KF}$	°C <sup>-2</sup>	0
<b>TR</b>	$\tau_R$	Tempo de Trânsito Ideal Reverso	s	0

Parâmetro		Descrição	Unidade	Default
<b>TRB1</b>	$T_{RB1}$	Coeficiente Linear de Temperatura de $R_B$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	0
<b>TRB2</b>	$T_{RB2}$	Coeficiente Quadrático de Temperatura de $R_B$	$^{\circ}\text{C}^{-2}$	0
<b>TRC1</b>	$T_{RC1}$	Coeficiente Linear de Temperatura de $r_C$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	0
<b>TRC2</b>	$T_{RC2}$	Coeficiente Quadrático de Temperatura de $r_C$	$^{\circ}\text{C}^{-2}$	0
<b>TRE1</b>	$T_{RE1}$	Coeficiente Linear de Temperatura de $r_E$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	0
<b>TRE2</b>	$T_{RE2}$	Coeficiente Quadrático de Temperatura de $r_E$	$^{\circ}\text{C}^{-2}$	0
<b>TRM1</b>	$T_{RM1}$	Coeficiente Linear de Temperatura de $R_{BM}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	0
<b>TRM2</b>	$T_{RM2}$	Coeficiente Quadrático de Temperatura de $R_{BM}$	$^{\circ}\text{C}^{-2}$	0
<b>VAF</b>	$V_{AF}$	Tensão Early Direta	V	$\infty$
<b>VAR</b>	$V_{AR}$	Tensão Early Reversa	V	$\infty$
<b>VJC</b>	$V_{JC}$	Potencial Interno da Junção B-C	V	0,75
<b>VJE</b>	$V_{JE}$	Potencial Interno da Junção B-E	V	0,75
<b>VJS</b>	$V_{JS}$	Potencial Interno da Junção C-S	V	0,75
<b>VO</b>	$v_o$	Tensão de Joelho da Curva - Mobilidade de Cargas	V	10
<b>VTF</b>	$V_{TF}$	Dependência de $V_{BC}$ do Tempo de Trânsito	V	$\infty$
<b>XCJC</b>	$X_{CJC}$	Fração de $C_{JC}$ Conectado à Base Intrínseca	-	1
<b>XTB</b>	$X_{TB}$	Coeficiente de Temperatura de $\beta$	-	0
<b>XTF</b>	$X_{TF}$	Coef. de Dependência de $V_{BC}$ do Tempo de Trânsito	-	0
<b>XTI</b>	$X_{TI}$	Expoente de Temperatura de $I_S$	-	3

## 2. Equações

As equações de modelagem de grandes sinais do *BJT*, em *DC* e em baixas frequências do modelo de Gummel-Poon, segundo as equações dos diodos e das grandezas elétricas do circuito equivalente da Figura 1, são:

- Correntes do efeito transistor, direta e reversa:

$$I_f = I_{St} \times \left[ \exp\left(\frac{V_{BEi}}{N_F V_t}\right) - 1 \right] \quad [\text{A}] \quad (1a)$$

e

$$I_r = I_{St} \times \left[ \exp\left(\frac{V_{BCi}}{N_R V_t}\right) - 1 \right] \quad [\text{A}] \quad (1b)$$

- Correntes de recombinação nas regiões de depleção B-C e B-E, responsáveis pela queda do  $\beta$  do transistor em baixas correntes:

$$I_{recE} = I_{SEi} \times \left[ \exp\left(\frac{V_{BEi}}{N_E V_t}\right) - 1 \right] \quad [\text{A}] \quad (2a)$$

e

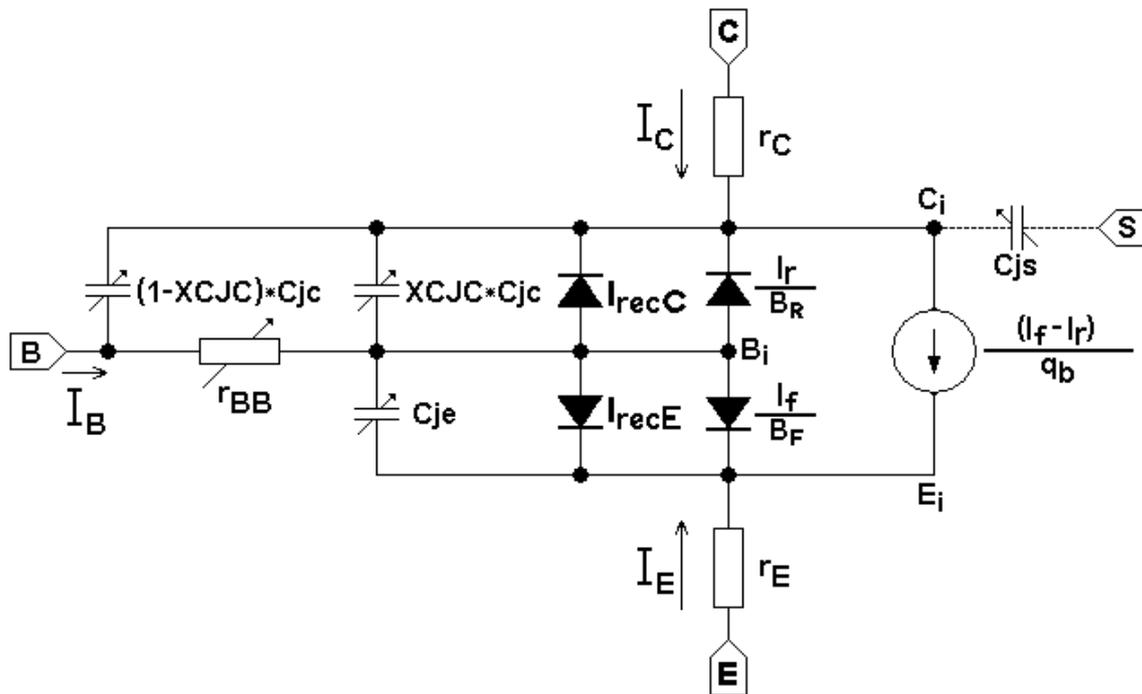


Figura 1 – Circuito Equivalente ao BJT no modelo de Gummel-Poon.

$$I_{recC} = I_{ScI} \times \left[ \exp\left(\frac{V_{BCi}}{N_C V_t}\right) - 1 \right] \quad [\text{A}] \quad (2b)$$

- Efeitos de segunda ordem:

- Efeito Early, responsável pelo aumento do  $\beta$  em função de  $V_{CE}$  devido à modulação de largura de base do BJT:

$$q_1 = \frac{1}{1 - \frac{V_{BCi}}{V_{AF}} - \frac{V_{BEi}}{V_{AR}}} \quad (3a)$$

- Efeito Kirk ou de alta injeção, responsável pela queda do  $\beta$  em regimes de altas correntes de coletor:

$$q_2 = \frac{I_f}{I_{KF}} + \frac{I_r}{I_{KR}} \quad (3b)$$

- Efeito Early e Efeito Kirk englobados:

$$q_b = \frac{q_1}{2} \times \left[ 1 + (1 + 4q_2)^{N_K} \right] \quad (3c)$$

- Correntes do *BJT*:

- Corrente de Base:

$$I_B = \left( \frac{I_f}{\beta_{Ft}} + I_{recE} + \frac{I_r}{\beta_{Rt}} + I_{recC} \right) \times \acute{A}REA \quad [A] \quad (4a)$$

- Corrente de Coletor:

$$I_C = \left( \frac{I_f}{q_b} - \frac{I_r}{q_b} - \frac{I_r}{\beta_{Rt}} - I_{recC} \right) \times \acute{A}REA \quad [A] \quad (4b)$$

- Corrente de Emissor:

$$I_E = -I_C - I_B \quad [A] \quad (4c)$$

- Corrente de Substrato:

$$I_{sub} = \left\{ I_{SSi} \times \left[ \exp\left( \frac{V_{CSi}}{N_S V_t} \right) - 1 \right] \right\} \times \acute{A}REA \quad [A] \quad (4d)$$

- Resistência intrínseca de base:

- Se  $I_{RB} < \infty$ :

$$r_{BB} = \frac{[R_{BMt} + 3(R_{Bt} - R_{BMt})] \times \frac{tg(z) - z}{z \times tg^2(z)}}{\acute{A}REA} \quad [\Omega] \quad (5a)$$

e

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{144}{\pi^2} \times \frac{I_B}{I_{RB} \times \acute{A}REA}}}{\left( \frac{24}{\pi^2} \right) \times \sqrt{\frac{I_B}{I_{RB} \times \acute{A}REA}}} \quad [rad] \quad (5b)$$

- Se  $I_{RB} \rightarrow \infty$ :

$$r_{BB} = \frac{R_{BMt} + \frac{R_{Bt} - R_{BMt}}{q_b}}{\acute{A}REA} \quad [\Omega] \quad (5c)$$

- Grandezas elétricas extrínsecas:

$$V_{BE} = (r_{Et} + r_{BB})I_B + r_{Et}I_C + V_{BEi} \quad [\text{V}] \quad (6a)$$

$$V_{CE} = (r_{Ct} + r_{Et})I_C + r_{Et}I_B + V_{BEi} - V_{BCi} \quad [\text{V}] \quad (6b)$$

$$V_{BC} = r_{BB}I_B - r_{Ct}I_C + V_{BCi} \quad [\text{V}] \quad (6c)$$

- Potencial térmico:

$$V_t = \frac{kT}{q} = 86,1734215226 \times 10^{-6} \times (\theta + 273,15) \quad [\text{V}] \quad (7)$$

- Observações: Os potenciais com um subscrito  $i$  são intrínsecos, isto é, medidos entre terminais internos do  $BJT$ . As grandezas com um subscrito  $t$  possuem dependência térmica e devem, conseqüentemente, ser calculadas em função da temperatura  $\theta$  [°C] ou  $T$  [K], dependendo do caso. A grandeza  $\acute{A}REA$  é, na verdade, um fator de área adimensional e indica, na maioria das vezes, o número de emissores de um determinado transistor  $NPN$ .

- Capacitâncias:

- Tempo de trânsito direto efetivo:

$$T_{FF} = T_F \left[ 1 + X_{TF} \left( \frac{I_f}{I_f + I_{TF} \times \acute{A}REA} \right)^2 \times \exp\left( \frac{V_{BCi}}{1,44V_{TF}} \right) \right] \quad [\text{s}] \quad (8)$$

- Capacitâncias de depleção:

- De coletor interno\_base interna (se  $V_{BCi} \leq FC \times V_{JC}$ ):

$$C_{jc} = X_{CJC} \times C_{JCt} \times \left( 1 - \frac{V_{BCi}}{V_{JCt}} \right)^{-m_{JC}} \quad [\text{F}] \quad (9a)$$

- De coletor interno\_base externa (se  $V_{BCi} \geq FC \times V_{JC}$ ):

$$C_{jc} = \frac{X_{CJC} \times C_{JCt}}{(1 - FC)^{(1+m_{JC})}} \times \left[ 1 - FC \times (1 + m_{JC}) + \frac{m_{JC} V_{BCi}}{V_{JCt}} \right] \quad [\text{F}] \quad (9b)$$

- De coletor interno\_base externa (se  $V_{BCi} \leq FC \times V_{JC}$ ):

$$C_{jx} = (1 - X_{CJC}) \times C_{JCI} \times \left(1 - \frac{V_{BCi}}{V_{JCI}}\right)^{-m_{JC}} \times \text{ÁREA} \quad [\text{F}] \quad (9c)$$

- De coletor interno\_base externa (se  $V_{BCi} \geq FC \times V_{JC}$ ):

$$C_{jx} = \frac{(1 - X_{CJC}) \times C_{JCI}}{(1 - FC)^{(1+m_{JC})}} \times \left[1 - FC \times (1 + m_{JC}) + \frac{m_{JC} V_{BCi}}{V_{JCI}}\right] \times \text{ÁREA} \quad [\text{F}] \quad (9d)$$

- De base interna\_emissor interno (se  $V_{BEi} \leq FC \times V_{JE}$ ):

$$C_{je} = C_{JEi} \times \left(1 - \frac{V_{BEi}}{V_{JEi}}\right)^{-m_{JE}} \quad [\text{F}] \quad (10a)$$

- De base interna\_emissor interno (se  $V_{BEi} \geq FC \times V_{JE}$ ):

$$C_{je} = \frac{C_{JEi}}{(1 - FC)^{(1+m_{JE})}} \times \left[1 - FC \times (1 + m_{JE}) + \frac{m_{JE} V_{BEi}}{V_{JEi}}\right] \quad [\text{F}] \quad (10b)$$

- Capacitâncias de difusão:

- De base\_emissor (se  $V_{BEi} > 0$  ou nula se  $V_{BEi} \leq 0$ ):

$$C_{BEdif} = T_{FF} \times \left( \frac{\partial I_f}{\partial V_{BEi}} + \frac{\partial I_{recE}}{\partial V_{BEi}} \right) \cong T_{FF} \times g_{mF} \quad [\text{F}] \quad (11)$$

- De base\_coletor (se  $V_{BCi} > 0$  ou nula se  $V_{BCi} \leq 0$ ):

$$C_{BCdif} = T_R \times \left( \frac{\partial I_r}{\partial V_{BCi}} + \frac{\partial I_{recC}}{\partial V_{BCi}} \right) \cong T_R \times g_{mR} \quad [\text{F}] \quad (12)$$

- Capacitâncias totais:

$$C_{BE} = C_{BEdif} + C_{je} \times \text{ÁREA} \quad [\text{F}] \quad (13a)$$

$$C_{BC} = C_{BCdif} + C_{jc} \times \text{ÁREA} \quad [\text{F}] \quad (13b)$$

- Capacitância de substrato:

- Se  $V_{CSi} > 0$ :

$$C_{js} = C_{JSI} \times \left(1 - \frac{V_{CSi}}{V_{JSI}}\right)^{-m_{JS}} \times \text{ÁREA} \quad (14a)$$

- Se  $V_{CSi} \leq 0$ :

$$C_{js} = C_{JSI} \times \left(1 + m_{JS} \times \frac{V_{CSi}}{V_{JSI}}\right) \times \text{ÁREA} \quad (14b)$$

### 3. Equacionamento Térmico

$$I_{St} = I_S \times \left(\frac{T}{300,15}\right)^{X_{TI}} \times \exp\left[\left(\frac{T}{300,15} - 1\right) \times \frac{E_G}{V_t}\right] \quad [\text{A}] \quad (15)$$

$$I_{SEt} = \left(\frac{I_{SE}}{\left(\frac{T}{300,15}\right)^{X_{TB}}}\right) \times \left(\frac{T}{300,15}\right)^{\frac{X_{TI}}{N_E}} \times \exp\left[\left(\frac{T}{300,15} - 1\right) \times \frac{E_G}{N_E V_t}\right] \quad [\text{A}] \quad (16)$$

$$I_{SCt} = \left(\frac{I_{SC}}{\left(\frac{T}{300,15}\right)^{X_{TB}}}\right) \times \left(\frac{T}{300,15}\right)^{\frac{X_{TI}}{N_C}} \times \exp\left[\left(\frac{T}{300,15} - 1\right) \times \frac{E_G}{N_C V_t}\right] \quad [\text{A}] \quad (17)$$

$$I_{SSt} = \left(\frac{I_{SS}}{\left(\frac{T}{300,15}\right)^{X_{TB}}}\right) \times \left(\frac{T}{300,15}\right)^{\frac{X_{TI}}{N_S}} \times \exp\left[\left(\frac{T}{300,15} - 1\right) \times \frac{E_G}{N_S V_t}\right] \quad [\text{A}] \quad (18)$$

$$\beta_{Ft} = \beta_F \times \left(\frac{T}{300,15}\right)^{X_{TB}} \quad (19)$$

$$\beta_{Rt} = \beta_R \times \left(\frac{T}{300,15}\right)^{X_{TB}} \quad (20)$$

$$r_{Et} = r_E \left[1 + T_{RE1} \times (T - 300,15) + T_{RE2} \times (T - 300,15)^2\right] \quad [\Omega] \quad (21)$$

$$r_{Ct} = r_C \left[1 + T_{RC1} \times (T - 300,15) + T_{RC2} \times (T - 300,15)^2\right] \quad [\Omega] \quad (22)$$

$$R_{Bt} = R_B \left[ 1 + T_{RB1} \times (T - 300,15) + T_{RB2} \times (T - 300,15)^2 \right] \quad [\Omega] \quad (23)$$

$$R_{BMt} = R_{BM} \left[ 1 + T_{RM1} \times (T - 300,15) + T_{RM2} \times (T - 300,15)^2 \right] \quad [\Omega] \quad (24)$$

$$E_{Gt} = 1,15491225778 - \frac{702 \times 10^{-6} T^2}{T + 1108} \quad [\text{eV}] \quad (25)$$

$$V_{JEt} = V_{JE} \times \frac{T}{300,15} - 3V_t \ln\left(\frac{T}{300,15}\right) - E_G \times \frac{T}{300,15} + E_{Gt} \quad [\text{V}] \quad (26)$$

$$V_{JCt} = V_{JC} \times \frac{T}{300,15} - 3V_t \ln\left(\frac{T}{300,15}\right) - E_G \times \frac{T}{300,15} + E_{Gt} \quad [\text{V}] \quad (27)$$

$$V_{JS t} = V_{JS} \times \frac{T}{300,15} - 3V_t \ln\left(\frac{T}{300,15}\right) - E_G \times \frac{T}{300,15} + E_{Gt} \quad [\text{V}] \quad (28)$$

$$C_{JEt} = C_{JE} \times \left\{ 1 + m_{JE} \times \left[ 0,0004 \times (T - 300,15) + \left( 1 - \frac{V_{JEt}}{V_{JE}} \right) \right] \right\} \quad [\text{F}] \quad (29)$$

$$C_{JCt} = C_{JC} \times \left\{ 1 + m_{JC} \times \left[ 0,0004 \times (T - 300,15) + \left( 1 - \frac{V_{JCt}}{V_{JC}} \right) \right] \right\} \quad [\text{F}] \quad (30)$$

$$C_{JS t} = C_{JS} \times \left\{ 1 + m_{JS} \times \left[ 0,0004 \times (T - 300,15) + \left( 1 - \frac{V_{JS t}}{V_{JS}} \right) \right] \right\} \quad [\text{F}] \quad (31)$$

$$I_{KFt} = I_{KF} \times \left[ 1 + T_{ikf1} \times (T - 300,15) + T_{ikf2} \times (T - 300,15)^2 \right] \quad (32)$$

#### 4. Modelagem de Pequenos Sinais

Quando o *BJT* é polarizado em um determinado ponto quiescente, as grandezas variáveis da Figura 1 tornam-se fixas e válidas para aquele ponto. Então, por exemplo, o resistor intrínseco variável de base,  $r_{BB}$ , passa a ter um valor fixo igual a  $r_x$ , nesse ponto. Os capacitores, igualmente, adquirem valores fixos e passam a valer:  $C_\pi$  (equivalente a  $C_{BE}$ ),  $C_\mu$  (equivalente a  $C_{BC}$ ) e  $C_{bx}$  (equivalente a  $C_{jx}$ ). Além disso, o transistor é substituído por um modelo linearizado, válido para um determinado ponto quiescente e para uma excursão incremental de sinal em torno desse ponto. A Figura 2 mostra esse circuito, também chamado de modelo linearizado de pequenos sinais do *BJT*. Nesse modelo, as grandezas elétricas valem:

- Transcondutância direta:

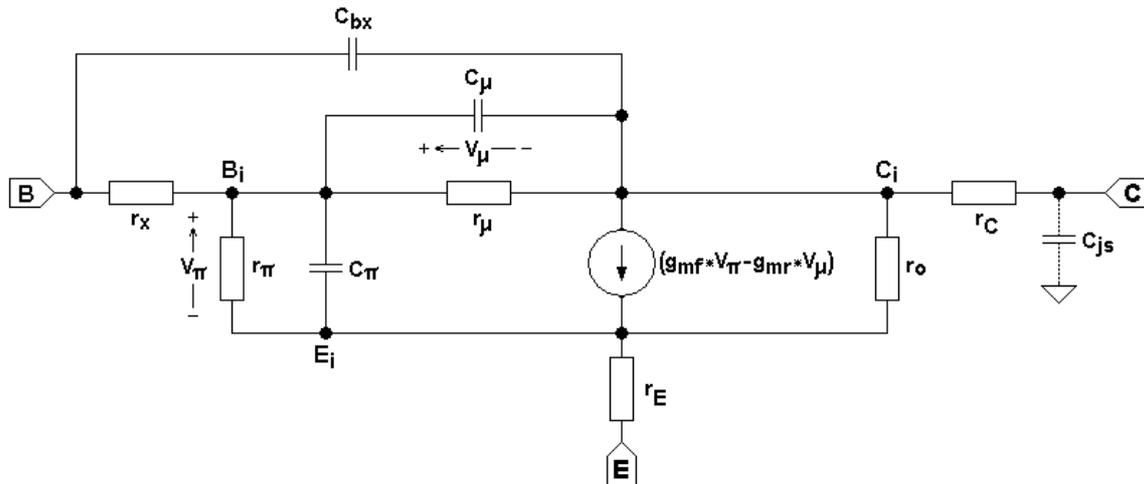


Figura 2 – Modelo Linearizado Para Pequenos Sinais do BJT.

$$g_{mf} = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BEi}} \quad [\text{A/V}] \quad (33)$$

- Transcondutância reversa:

$$g_{mr} = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BCi}} \quad [\text{A/V}] \quad (34)$$

- Condutância incremental de entrada:

$$g_{\pi} = \frac{\partial I_B}{\partial V_{BEi}} \quad [\text{mho}] \quad (35a)$$

- Resistência incremental de entrada:

$$r_{\pi} = \frac{1}{g_{\pi}} \quad [\Omega] \quad (35b)$$

- Condutância incremental de realimentação:

$$g_{\mu} = \frac{\partial I_B}{\partial V_{BCi}} \quad [\text{mho}] \quad (36a)$$

- Resistência incremental de realimentação:

$$r_{\mu} = \frac{1}{g_{\mu}} \quad [\Omega] \quad (36b)$$

- Condutância incremental de saída:

$$g_o = \frac{\partial I_C}{\partial V_{CEi}} = -\frac{\partial I_C}{\partial V_{BCi}} - \frac{\partial I_B}{\partial V_{BCi}} \approx -g_{mr} \quad [\text{mho}] \quad (37a)$$

- Resistência incremental de saída:

$$r_o = \frac{1}{g_o} \quad [\Omega] \quad (37b)$$

- Ganho de corrente em AC:

$$\beta_{AC} = \frac{\partial I_C}{\partial I_B} \quad (38)$$

- Frequência de transição (frequência na qual  $\beta_{AC} = 1$ ):

$$f_T \cong \frac{g_m}{2\pi(C_\pi + C_\mu)} \quad [\text{Hz}] \quad (39)$$

Na Equação 39,  $g_m$  é a transcondutância genérica do transistor e vale  $g_m \approx g_{mf} - g_o$ .

## 5. Modelagem de Ruído

Dispositivos semicondutores, assim como a maioria dos componentes eletro-eletrônicos, geram ruídos provenientes de fontes de várias naturezas. Resistores apresentam ruído térmico, também chamado de ruído Johnson ou ruído branco, proveniente de choques aleatórios entre portadores livres que adquirem movimentos vibratórios com o aumento da temperatura. Os semicondutores apresentam normalmente três tipos de ruído: ruído *shot*, também chamado de ruído Schottky, proveniente da geração térmica aleatória de pares elétron-lacunas nas regiões de carga espacial; ruído *flicker*, proveniente da flutuação aleatória da corrente de polarização em função da temperatura, e ruído Johnson, associado às resistências de perdas internas. Para o *BJT*, segundo um modelo chamado de Giacoletto, as fontes de ruído, estipuladas para uma largura de faixa  $B = 1 \text{ Hz}$ , podem ser representadas pelas equações:

- Ruído térmico devido à  $r_C$ :

$$i_{Cn1} = \sqrt{\frac{4kT}{r_C}} \quad [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (40)$$

- Ruído térmico devido à  $r_B$ :

$$i_{Bn1} = \sqrt{\frac{4kT}{r_{BB}}} \quad [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (41)$$

- Ruído térmico devido à  $r_E$ :

$$i_{En} = \sqrt{\frac{4kT}{r_E}} \quad [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (42)$$

- Ruído *shot* devido à  $I_C$ :

$$i_{Cn2} = \sqrt{2qI_C} \quad [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (43)$$

- Ruído *shot* + *flicker* devido à  $I_B$ :

$$i_{Bn2} = \sqrt{2qI_B + \frac{I_B^{A_F}}{f} \times K_F} \quad [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (44)$$

Nessas equações,  $q = 1,60219 \times 10^{-19} \text{ C}$  é a carga do elétron;  $k = 1,38062 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  é a constante de Boltzmann;  $T$  [K] é a temperatura absoluta;  $f$  [Hz] é a frequência na qual o ruído foi calculado.  $A_F$  e  $K_F$  são os parâmetros de modelagem de ruído *flicker*.

## 6. Modelagem de Quase-Saturação

Quase-saturação é uma condição especial à qual o *BJT* fica submetido quando a junção interna  $B_i-C_i$  já está com polarização direta, enquanto que a junção externa  $B-C$  ainda está reversa, isto é,  $V_{BCi} > 0$  e  $V_{BC} < 0$ , para o transistor **npn**. Essa situação acontece na transição entre as regiões de polarização ativa direta e a de saturação e alcançou grande importância com a ascensão do uso de circuitos portáteis, alimentados com tensões muito baixas ( $V_{CC} \leq 5V$ ). O efeito de quase-saturação foi adicionado ao modelo de Gummel-Poon através da colocação de mais uma fonte ( $I_{epi}$ ) injetando corrente no coletor e que representa a modelagem da região epitaxial (fora da camada enterrada), como ilustra a Figura 3. A resistência interna dessa fonte ( $r_{co}$ ) é tida como sendo uma parcela da resistência total de perdas de coletor, isto é,  $r_{C(total)} = r_C + r_{co}$ . Conclui-se, portanto, que  $r_{co}$  é a resistência de perdas da camada epitaxial e  $r_C$  é a resistência de perdas das demais regiões de coletor (camada enterrada e contato ôhmico). As novas equações, adicionadas ao modelo, são:

$$Q_o = \left( K_2 - 1 - \frac{\gamma}{2} \right) \times Q_{co} \times \text{ÁREA} \quad [\text{C}] \quad (45a)$$

e

$$Q_w = \left( K_1 - 1 - \frac{\gamma}{2} \right) \times Q_{co} \times \text{ÁREA} \quad [\text{C}] \quad (45b)$$

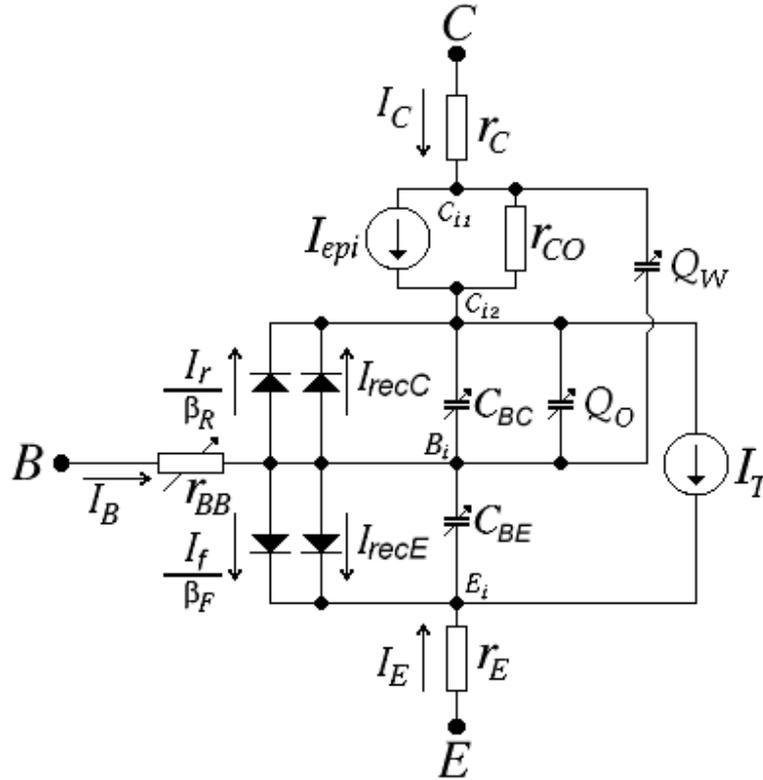


Figura 3 – Circuito Equivalente ao Modelo de Gummel com Adição do Efeito de Quase-Saturação.

$Q_O$  e  $Q_W$  são as cargas de dois novos capacitores adicionados ao modelo original de Gummel, como mostra a Figura 3.

$$I_{epi} = \frac{\left\{ V_t \times \left[ K_2 - K_1 - \ln \left( \frac{1 + K_2}{1 + K_1} \right) \right] + V_{BCi2} - V_{BCi1} \right\} \times v_o}{\left( (V_{BCi2} - V_{BCi1}) + v_o \right) \times r_{CO}} \times \text{ÁREA} \quad [\text{A}] \quad (46)$$

As constantes adimensionais  $K_1$  e  $K_2$ , que aparecem nas Equações 44, 45 e 46, valem:

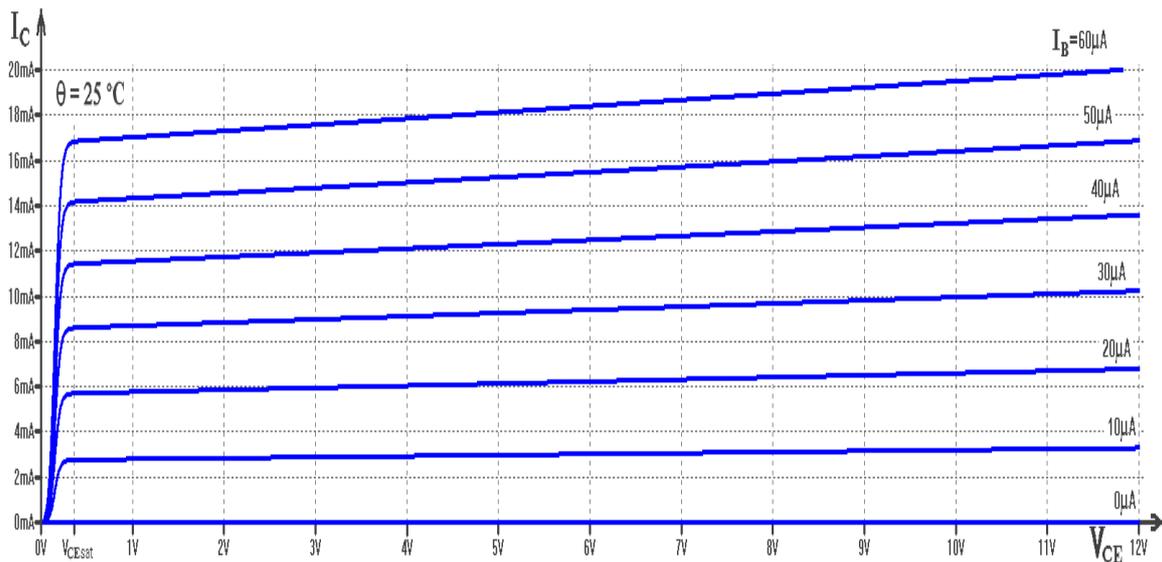
$$K_1 = \sqrt{1 + \gamma \times \exp \left( \frac{V_{BCi1}}{V_t} \right)} \quad e \quad K_2 = \sqrt{1 + \gamma \times \exp \left( \frac{V_{BCi2}}{V_t} \right)}$$

A tensão  $V_{BCi2} - V_{BCi1}$  é a queda de tensão interna sobre o resistor  $R_{CO}$ .

Os parâmetros de modelagem de quase-saturação são:  $r_{CO} > 0$ ,  $v_o$ ,  $\gamma$ ,  $Q_{CO}$ .

## Curvas Estáticas

Em bancadas de laboratório, grandezas elétricas podem ser aplicadas ao *BJT* para caracterizá-lo eletricamente. São elas:  $V_{CE}$ ,  $V_{BE}$ ,  $I_C$  e  $I_B$ . As grandezas  $V_{BC}$  e  $I_E$  são redundantes. As principais e mais úteis curvas são vistas a seguir.



**Figura 4 –** Curvas de  $I_C$  x  $V_{CE}$ , tendo  $I_B$  como parâmetro @  $25\text{ }^\circ\text{C}$ , de um *BJT npn* de áudio, para aplicação em pequenos sinais.

- A Figura 4 apresenta a família de curvas de correntes de coletor ( $I_C$ ) em função da tensão aplicada entre o coletor e o emissor ( $V_{CE}$ ), típicas de um transistor de silício *npn* para pequenos sinais e baixas frequências, tendo a corrente de base ( $I_B$ ) como parâmetro. As curvas foram traçadas para uma temperatura de junção igual a  $25\text{ }^\circ\text{C}$ . A região contida na faixa  $0V \leq V_{CE} \leq V_{CEsat}$  é conhecida como região de saturação do *BJT* e a tensão limítrofe superior dessa região é chamada de tensão de saturação de coletor, isto é,  $V_{CEsat}$ , que, no caso, vale aproximadamente  $0,36V$ . Nessa região, o efeito transistor ainda não foi atingido e, conseqüentemente, o dispositivo não pode funcionar como um bom amplificador de sinais. Nessa região, normalmente, o *BJT* é usado como chave fechada. Para  $V_{CE} \geq V_{CEsat}$  o *BJT* entra na sua região ativa direta e funciona como um ótimo amplificador de sinais. Para fazer o *BJT* trabalhar como chave aberta basta fazer  $I_B = 0$ . Nesse caso, a corrente de coletor tende a zero para qualquer tensão  $V_{CE}$  aplicada, desde que  $V_{CE} \leq V_{CEo}$ , sendo  $V_{CEo}$  a tensão de ruptura reversa do diodo *C-B*, com o emissor aberto, que não deve ser ultrapassada em nenhuma hipótese. As curvas da Figura 4 pertencem ao quadrante de saída do *BJT* e não trazem nenhuma informação sobre a quarta grandeza,  $V_{BE}$ . Essas curvas permitem, no entanto, o cálculo da condutância incremental de saída do dispositivo, que vale  $g_o = \Delta I_C / \Delta V_{CE}$ , com  $I_B$  constante, calculada em torno de um determinado ponto de polarização. A resistência incremental de saída do *BJT* vale, conseqüentemente,  $r_o = 1/g_o$ .

- A Figura 5 apresenta a família de curvas da tensão aplicada entre a base e o emissor ( $V_{BE}$ ) em função da corrente de base ( $I_B$ ), típicas de um transistor de silício *npn* para pequenos sinais e baixas frequências, tendo a tensão entre o coletor e o emissor ( $V_{CE}$ ) como parâmetro. Como pode ser constatado, a tensão  $V_{CE}$  influencia muito pouco nos valores dessas tensões. As curvas foram traçadas para uma temperatura de junção igual a  $25\text{ }^\circ\text{C}$ . Essas curvas pertencem ao quadrante de entrada do *BJT* e não trazem nenhuma informação sobre a quarta grandeza,  $I_C$ . Elas permitem, no entanto, o cálculo da resistência incremental de entrada do dispositivo, que vale  $r_\pi = \Delta V_{BE} / \Delta I_B$ , com  $V_{CE}$  constante, calculada em torno de um determinado ponto de polarização.

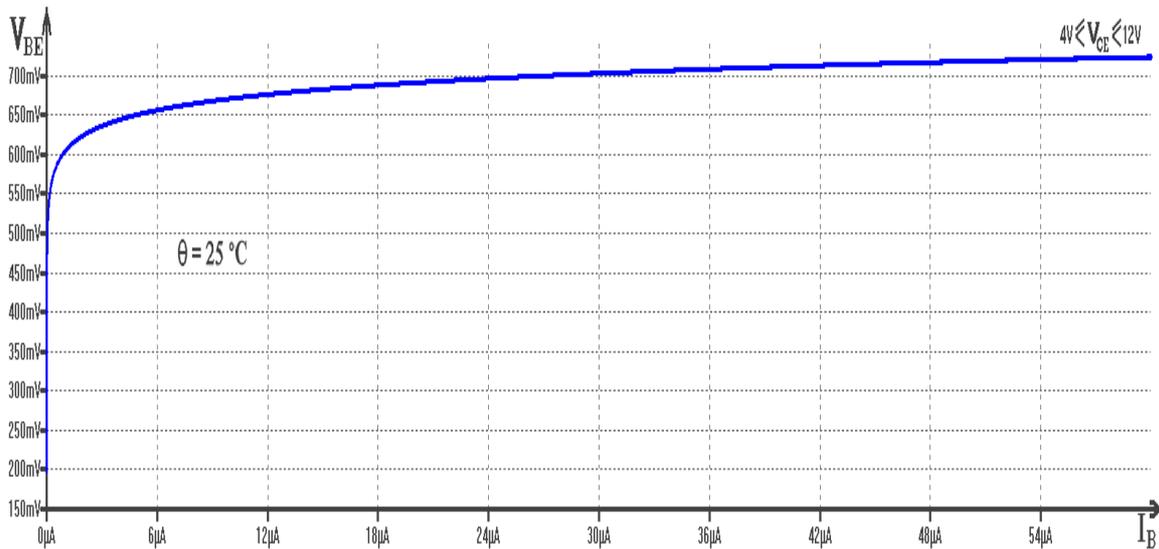


Figura 5 - Curvas de  $V_{BE} \times I_B$ , tendo  $V_{CE}$  como parâmetro @  $25^\circ\text{C}$ , de um BJT npn de áudio, para aplicação em pequenos sinais.

- A Figura 6 apresenta a família de curvas da tensão aplicada entre a base e o emissor ( $V_{BE}$ ), em função da tensão aplicada entre o coletor e o emissor ( $V_{CE}$ ), típicas de um transistor de silício npn para pequenos sinais e baixas frequências, tendo a corrente de base ( $I_B$ ) como parâmetro. As curvas foram traçadas para uma temperatura de junção igual a  $25^\circ\text{C}$ . Essas curvas pertencem ao quadrante de transferência de tensão entre a saída e a entrada do BJT e não trazem nenhuma informação sobre a quarta grandeza,  $I_C$ . Elas permitem, no entanto, o cálculo do ganho incremental reverso de tensão do dispositivo, que vale  $A_{vr} = \Delta V_{BE} / \Delta V_{CE}$ , com  $I_B$  constante, calculada em torno de um determinado ponto de polarização. Essa grandeza é responsável pela intensidade de amplificação reversa de sinais do dispositivo e é praticamente desprezível ( $A_{vr} \leq 500 \mu\text{V/V}$ ) na região ativa direta.

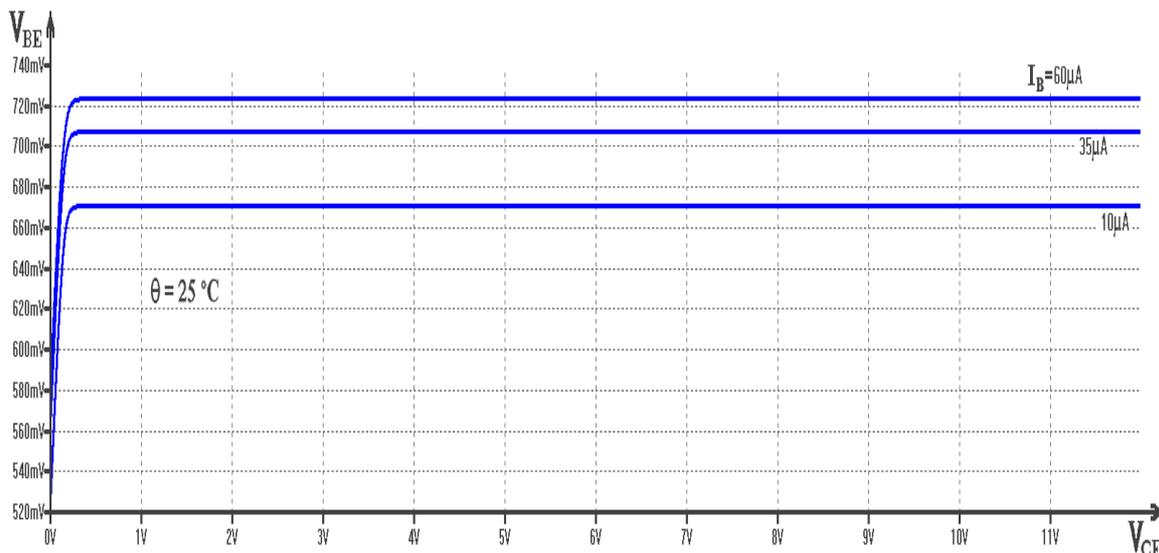
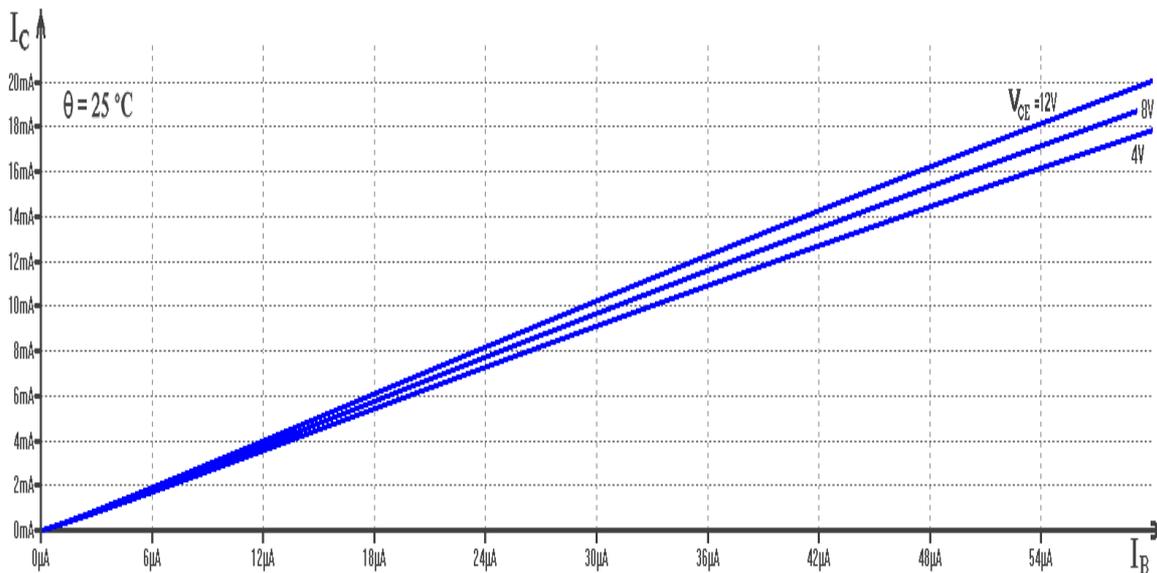


Figura 6 - Curvas de  $V_{BE} \times V_{CE}$ , tendo  $I_B$  como parâmetro @  $25^\circ\text{C}$ , de um BJT npn de áudio, para aplicação em pequenos sinais.



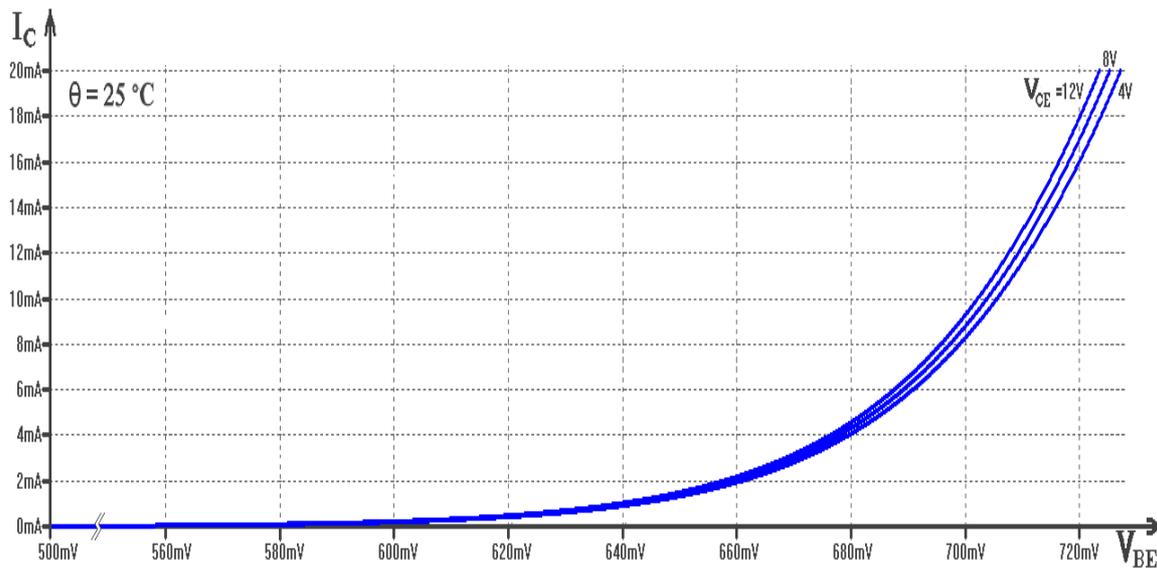
**Figura 7 -** Curvas de  $I_C$  x  $I_B$ , tendo  $V_{CE}$  como parâmetro @ 25 °C, de um BJT *npn* de áudio, para aplicação em pequenos sinais.

- A Figura 7 apresenta a família de curvas de correntes de base ( $I_C$ ) em função da corrente de base ( $I_B$ ), típicas de um transistor de silício *npn* para pequenos sinais e baixas frequências, tendo a tensão entre o coletor e o emissor ( $V_{CE}$ ) como parâmetro. As curvas foram traçadas para uma temperatura de junção igual a 25 °C. Essas curvas pertencem ao quadrante de transferência de corrente entre a entrada e a saída do BJT e não trazem nenhuma informação sobre a quarta grandeza,  $V_{BE}$ . Elas permitem, no entanto, o cálculo do ganho de corrente incremental direta do dispositivo, que vale  $\beta_{AC} = \Delta I_C / \Delta I_B$ , com  $V_{CE}$  constante, calculada em torno de um determinado ponto de polarização.

Os quatro gráficos apresentados nas Figuras 4, 5, 6 e 7 bastam para retratar eletricamente um Transistor Bipolar de Junção e podem ser traçados por instrumentos adequados em bancadas de laboratório. Antes do desenvolvimento de programas simuladores, como o SPICE, os projetistas de circuitos eletrônicos analógicos utilizam-se desses gráficos para desenvolverem os seus projetos. Os parâmetros incrementais, chamados de parâmetros híbridos de emissor-comum, são calculados com a entrada em aberto ou com a saída em curto-circuito e, portanto, não podem ser extraídos desses gráficos. Eles são:

- Condutância incremental de saída,  $h_{oe} = \partial I_C / \partial V_{CE}$ , com  $I_B = 0 \Rightarrow$  gráfico da Figura 4.
- Resistência incremental de entrada,  $h_{ie} = \partial V_{BE} / \partial I_B$ , com  $V_{CE} = 0 \Rightarrow$  gráfico da Figura 5.
- Ganho incremental de tensão reversa,  $h_{re} = \partial V_{BE} / \partial V_{CE}$ , com  $I_B = 0 \Rightarrow$  gráfico da Figura 6.
- Ganho incremental de corrente direta,  $h_{fe} = \partial I_C / \partial I_B$ , com  $V_{CE} = 0, \Rightarrow$  gráfico da Figura 7.

Como esses parâmetros não podem ser extraídos dos gráficos anteriores e não podem ser calculados em função de um ponto de polarização, os programas de computador não conseguem utilizá-los e, por isso, eles se tornaram obsoletos. Parâmetros incrementais são extraídos desses gráficos e de novos gráficos necessários, como o gráfico da Figura 8.



**Figura 8 -** Curvas de  $I_C$  x  $V_{BE}$ , tendo  $V_{CE}$  como parâmetro @ 25 °C, de um BJT npn de áudio, para aplicação em pequenos sinais.

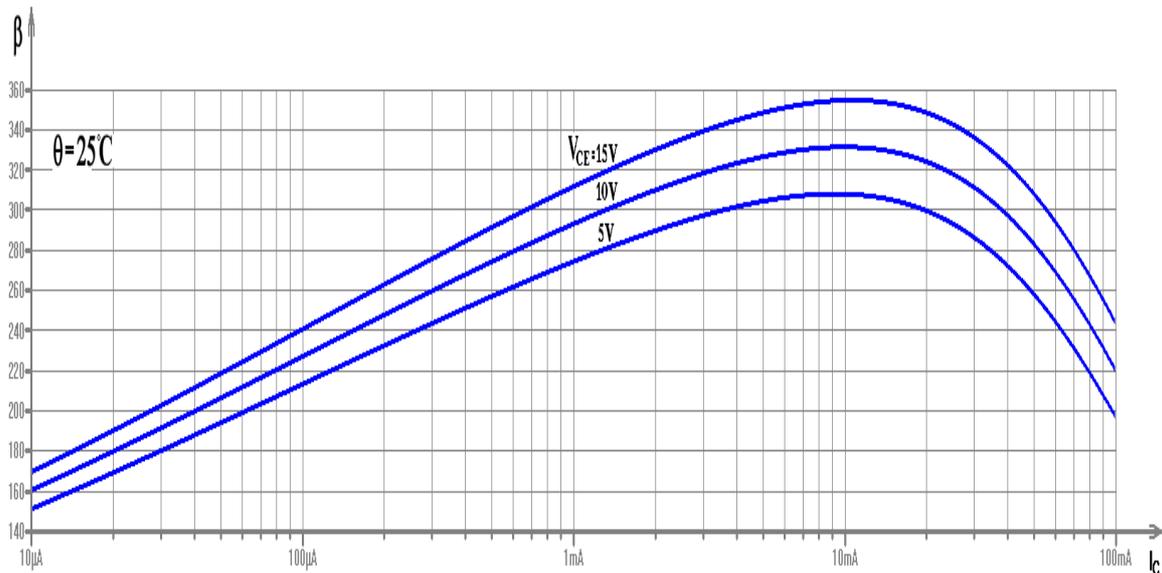
- A Figura 8 apresenta a família de curvas de correntes de coletor ( $I_C$ ) em função da tensão aplicada entre a base e o emissor ( $V_{BE}$ ), típicas de um transistor de silício npn para pequenos sinais e baixas frequências, tendo a tensão entre o coletor e o emissor ( $V_{CE}$ ) como parâmetro. Esse é, realmente, o gráfico do efeito transistor. As curvas foram traçadas para uma temperatura de junção igual a 25 °C. Essas curvas pertencem ao quadrante de transferência entre a tensão de entrada e a corrente de saída do BJT e não trazem nenhuma informação sobre a quarta grandeza,  $I_B$ . Elas permitem, no entanto, o cálculo da transcondutância incremental direta do dispositivo, que vale  $g_m = \Delta I_C / \Delta V_{BE}$ , com  $V_{CE}$  constante, calculada em torno de um determinado ponto de polarização. Essa grandeza é responsável pela intensidade de amplificação de sinais do dispositivo, na região ativa direta.

### Amplificação Estática de Corrente

Transistores bipolares de junção, analisados como quadripolos elétricos, podem ser vistos dinamicamente como amplificadores de transcondutância, de tensão ou de corrente. Estaticamente, porém, o BJT é um típico amplificador de corrente. O ganho de corrente estático do BJT ( $\beta$ ) é o valor obtido em um ponto quiescente pela divisão do valor de  $I_C$  de repouso pelo valor de  $I_B$  de repouso, obtidos no gráfico da Figura 7 para um determinado valor de  $V_{CE}$  de repouso. Rigorosamente, a relação entre  $I_C$  e  $I_B$  vale:

$$I_C = \beta I_B + (\beta + 1)I_{CB0} \quad (47)$$

A corrente  $I_{CB0}$  é a corrente de fuga reversa do diodo C-B, que está reversamente polarizado, na região ativa direta. Essa corrente possui valores desprezíveis em temperaturas inferiores a 30 °C, mas cresce muito rapidamente com a temperatura. Esse fato faz com que o valor da corrente  $I_C$  seja afetado mesmo que  $I_B$  não se altere, quando a temperatura crescer acima de 30 °C. Esse efeito é modelado pelas Equações apresentadas na Seção 3. Em temperaturas ambientes normais, no entanto, considera-se  $\beta = I_C / I_B$ .

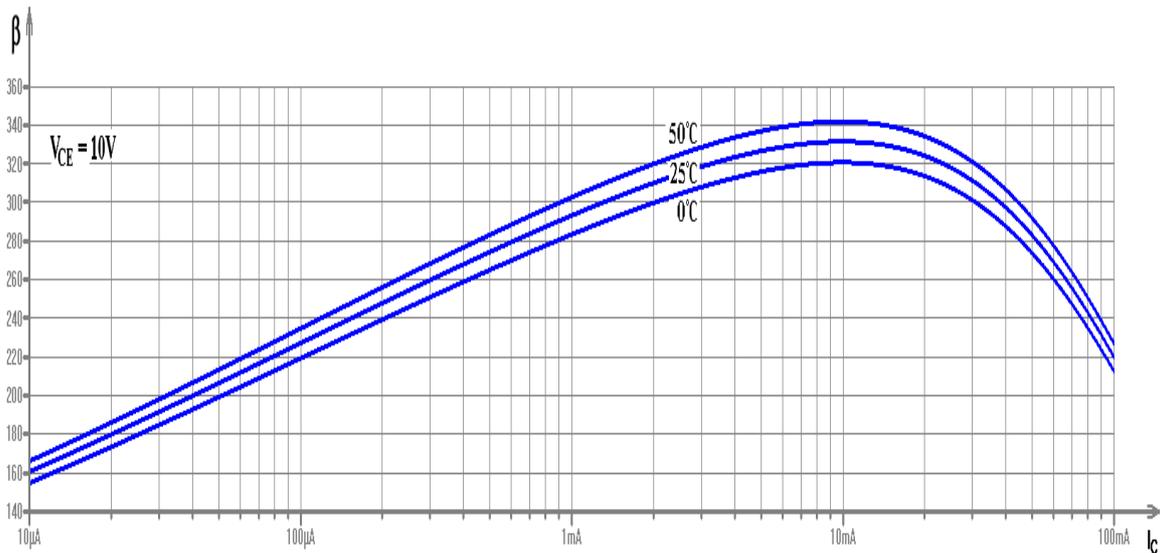


**Figura 9 -** Curvas de  $\beta \times I_C$ , tendo  $V_{CE}$  como parâmetro @ 25 °C, de um *BJT npn* de áudio, para aplicação em pequenos sinais.

O valor do fator de amplificação estático de corrente do *BJT* ( $\beta$ ) é inversamente proporcional à largura efetiva de base e também inversamente proporcional à concentração de dopantes dessa região. Bases estreitas e fracamente dopadas propiciam transistores com valores elevados de  $\beta$  e vice-versa. Percebe-se, pelas curvas da Figura 9, no entanto, que um transistor convencional de silício possui desempenho otimizado apenas em uma faixa central de valores de correntes de coletor. Em regime de baixa injeção, com  $I_C \leq 300 \mu A$  no exemplo ilustrado pela Figura 9, o valor de  $\beta$  cai porque as recombinações de portadores na região de depleção da junção *B-E* tornam-se significativas perante a corrente total de coletor. Como, por esse fato, o valor da corrente de coletor decresce relativamente, sem o respectivo decréscimo da corrente de base, o  $\beta$  cai. Em regime de alta injeção, com  $I_C \geq 20 mA$  nesse mesmo exemplo, por outro lado, a concentração de portadores na base cresce, a largura de base conseqüentemente aumenta e o  $\beta$  cai. Esse fenômeno é conhecido como efeito Kirk, modelado por  $I_{KF}$  ou por  $I_{KR}$ , como mostra a Equação 3b. A influência da tensão  $V_{CE}$ , conhecida como efeito Early, modelado por  $V_{AF}$  ou por  $V_{AR}$ , atua no sentido de aumentar o  $\beta$  em função da tensão aplicada, porque, com o aumento da tensão reversa no diodo *C-B*, a região de depleção aprofunda-se mais na base, a base é, conseqüentemente, estreitada e o  $\beta$  cresce. As Equações 3a e 3c calculam esses efeitos. A temperatura das junções também afeta o valor de  $\beta$  do transistor.

## Efeitos Térmicos

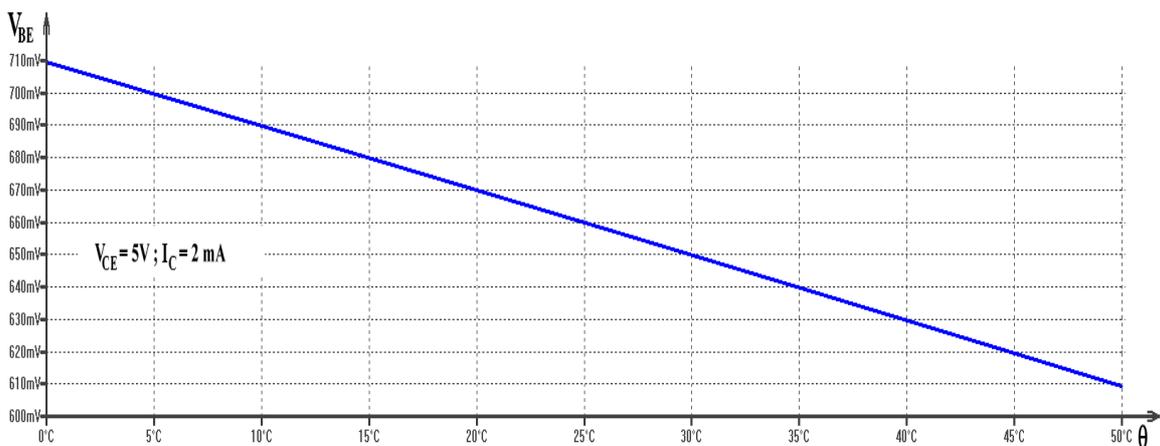
Na Secção 3 foram apresentadas todas as equações da modelagem térmica do *BJT*, segundo o modelo de Gummel-Poon. Variações térmicas afetam significativamente os semicondutores em geral, principalmente e particularmente os dispositivos bipolares. Os gráficos a seguir mostram esses efeitos.



**Figura 10 - Curvas de  $\beta \times I_C$ , tendo  $\theta$  como parâmetro e com  $V_{CE} = 10\text{ V}$ , de um *BJT npn* de áudio, para aplicação em pequenos sinais.**

- Efeito térmico sobre o  $\beta$  do transistor bipolar: a temperatura faz o  $\beta$  do transistor crescer proporcionalmente, porque, aumentando, aumenta a geração de minoritários na base. Como a corrente de coletor é diretamente proporcional à população desses minoritários, a corrente de coletor cresce espontaneamente com a temperatura e o  $\beta$  cresce. A Figura 10 ilustra esse fenômeno para o transistor exemplificado.

- Efeito térmico sobre a tensão entre base e emissor ( $V_{BE}$ ): assim como qualquer junção **pn** polarizada diretamente, a barreira de potencial interna decresce com o aumento da temperatura. Isso acontece porque o aumento da temperatura faz crescer a população de minoritários na base, estreitando, portanto a região de depleção *B-E* e, conseqüentemente, diminuindo a barreira de potencial interna. A Figura 11 mostra essa variação para o transistor do exemplo. Em transistores de silício, essa variação é da ordem de  $-2\text{ mV}/^\circ\text{C}$ , podendo variar, dependendo do nível de dopagem da base, na faixa:  $-2,2\text{ mV}/^\circ\text{C} \leq \Delta V_{BE}/\Delta \theta \leq -1,8\text{ mV}/^\circ\text{C}$ . Essa variação é praticamente linear para  $0^\circ\text{C} \leq \theta \leq 50^\circ\text{C}$ .



**Figura 11 – Variação de  $V_{BE}$  em Função da Temperatura de um *BJT* com  $V_{CE} = 5\text{ V}$  e  $I_C = 2\text{ mA}$ .**

## Modelo de Ebers-Moll Melhorado ou de Gummel Simplificado

Como o modelo de Gummel-Poon é muito extenso e complexo demais e como o modelo de Ebers-Moll é simples demais, um modelo intermediário foi desenvolvido para ser usado em cálculos manuais envolvendo o *BJT*. Esse modelo é satisfatoriamente preciso na região ativa direta para transistores de pequenos sinais polarizados com  $300 \mu A \leq I_C \leq 20 \text{ mA}$  e com  $V_{CE} \geq V_{CEsat}$ . Esse modelo, no entanto, não é válido nas regiões: de saturação, de baixa injeção e de alta injeção. A modelagem térmica e o efeito Early, por outro lado, foram incluídos:

$$I_{St} = I_S \times \left( \frac{T}{300,15} \right)^{X_{TI}} \times \exp \left[ \left( \frac{T}{300,15} - 1 \right) \times \frac{1,11}{V_t} \right] \quad (48)$$

$$\beta_{Ft} = \beta_F \times \left( \frac{T}{300,15} \right)^{X_{TB}} \quad (49)$$

$$\beta_{Rt} = \beta_R \times \left( \frac{T}{300,15} \right)^{X_{TB}} \quad (50)$$

$$V_{BC} = V_{BE} - V_{CE} \quad (51)$$

$$q_b = \frac{V_{AF}}{V_{AF} + |V_{BC}|} \quad (52)$$

$$I_B = \frac{I_{St}}{\beta_{Ft}} \left[ \exp \left( \frac{V_{BE}}{N_F V_t} \right) - 1 \right] + \frac{I_{St}}{\beta_{Rt}} \left[ \exp \left( \frac{V_{BC}}{N_R V_t} \right) - 1 \right] \quad (53)$$

$$I_C = \frac{I_{St}}{q_b} \left[ \exp \left( \frac{V_{BE}}{N_F V_t} \right) - 1 \right] - \frac{I_{St}}{q_b} \left( 1 + \frac{q_b}{\beta_{Rt}} \right) \left[ \exp \left( \frac{V_{BC}}{N_R V_t} \right) - 1 \right] \quad (54)$$

$$C_\pi = g_m \tau_F + C_{JE} (1 - FC)^{-(1+m_{JE})} \left[ 1 - FC (1 + m_{JE}) + \frac{m_{JE} V_{BE}}{V_{JE}} \right] \quad (55)$$

$$C_\mu = \frac{C_{JC}}{\left( 1 + \frac{|V_{BC}|}{V_{JC}} \right)^{m_{JC}}} \quad (56)$$

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_\pi + C_\mu)} \quad (57)$$

$$g_m = \frac{I_C}{N_F V_t} \quad ; \quad r_\pi = \frac{\beta}{g_m} \quad ; \quad r_o = \frac{V_{AF} + V_{CE} - V_{BE}}{I_C} \quad (58)$$

$$V_t = 86,1734215226 \times 10^{-6} \times T \quad (59)$$

$$T = \theta + 273,15 \quad (60)$$

O modelo linearizado para pequenos sinais e baixas frequências é o mesmo da Figura 2 com  $\beta_{AC} = \beta$ ,  $C_{bx} = C_{js} = r_C = r_E = r_x = 0$ ,  $r_\mu \rightarrow \infty$ ,  $g_{mf} = g_m$ ,  $g_{mr} = 0$  e  $v_\pi = v_{BE}$ .