- Alguns exemplos de tensores

Já vimos alguns exemplos de grandezas físicas que satisfazem a definição de um tensor de posto (n,m), para algum $n, m \in \mathbb{N}$. Entre eles temos a 4-velocidade u^μ, a 4-aceleração a^μ, o intervalo de tempo próprio $\Delta\tau$, a aceleração própria $a_0 := (\eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu)^{1/2}$, o tensor com componentes $\eta_{\mu\nu}$ (métrica), o 4-momento p^μ, a 4-força F^μ. Consideremos mais alguns exemplos de tensores.

→ O tensor eletromagnético de Faraday

As equações de Maxwell do eletromagnetismo possuem a seguinte forma 3-vetorial:

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \nabla\cdot\mathbb{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla\times\mathbb{B} = \mu_0\mathbb{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}$$

É bem conhecido que podemos tornar a segunda equação uma identidade se fizermos a substituição $\mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A}$, onde $\mathbb{A}$ é um 3-vetor, chamado potencial vetor. Com essa substituição, a terceira equação fica escrita como:

$$\nabla\times\left(\mathbb{E} + \frac{\partial\mathbb{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Essa equação, por sua vez, nos motiva a introduzir uma função potencial ϕ através de:

$$\mathbb{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$$

Com essas substituições, 4 das 8 equações de Maxwell são resolvidas. Ou seja, qualquer função ϕ e campo vetorial $\mathbb{A}$ dão origem a campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ que satisfazem as 4 equações de Maxwell já utilizadas. Notemos que, definindo o 4-vetor potencial pelas componentes $A^\mu := (\phi, c\mathbb{A})$, e definindo o tensor de posto (0,2)

$$F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad , \quad \text{com} \quad A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad , \qquad (\text{XLIII})$$

temos que suas componentes são dadas, num referencial inercial qualquer, por:

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{1}{c}\frac{\partial (cA^x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(-\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A^x}{\partial t} = \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right)^x = -E^x$$

$$F_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial (A^y c)}{\partial t} - \frac{\partial (-\phi)}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial A^y}{\partial t} = \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right)^y = -E^y$$

$$F_{03} = \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} = \frac{1}{c}\frac{\partial (cA^z)}{\partial t} - \frac{\partial (-\phi)}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial A^z}{\partial t} = \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right)^z = -E^z$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = c\frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial cA^x}{\partial y} = c(\nabla \times \mathbb{A})^z = B^z c$$

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = c\frac{\partial A^z}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial z}c = -c(\nabla \times \mathbb{A})^y = -B^y c$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = c\frac{\partial A^z}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial z}c = c(\nabla \times \mathbb{A})^x = B^x c$$

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \qquad \text{e} \qquad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

ou seja, as componentes $F_{\mu\nu}$ estão relacionadas com as componentes dos campos elétrico $\mathbb{E} = (E^x, E^y, E^z)$ e magnético $\mathbb{B} = (B^x, B^y, B^z)$ através da relação:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & cB^z & -B^y c \\ E^y & -B^z c & 0 & cB^x \\ E^z & B^y c & -B^x c & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{XLIV})$$

Podemos, ainda, utilizar o tensor de posto (2,0) cujas componentes formam a matriz inversa de $\eta_{\mu\nu}$, que denotaremos por $\eta^{\mu\nu}$ (que portanto satisfaz $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$) para "levantar o índice" de $F_{\mu\nu}$, obtendo:

$$F^{\mu}{}_{\nu} := \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ E^x & 0 & cB^z & -B^y c \\ E^y & -B^z c & 0 & cB^x \\ E^z & cB^y & -B^x c & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu}{}^{\nu} := \eta^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ -E^x & 0 & cB^z & -B^y c \\ -E^y & -B^z c & 0 & cB^x \\ -E^z & cB^y & -B^x c & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} := \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & cB^z & -B^y c \\ -E^y & -B^z c & 0 & B^x c \\ -E^z & cB^y & -B^x c & 0 \end{pmatrix}$$

A partir dessa última matriz, calculemos o 4-vetor $\partial_\mu F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{c}\frac{\partial F^{00}}{\partial t} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x} + \frac{\partial F^{20}}{\partial y} + \frac{\partial F^{30}}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbb{E}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{1}{c}\frac{\partial F^{01}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{21}}{\partial y} + \frac{\partial F^{31}}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E^x}{\partial t} - \frac{\partial c B^z}{\partial y} + \frac{\partial B^y c}{\partial z} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} - c\nabla \times \mathbb{B}\right)^x$$

$$\partial_\mu F^{\mu 2} = \frac{1}{c}\frac{\partial F^{02}}{\partial t} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x} + \frac{\partial F^{22}}{\partial y} + \frac{\partial F^{32}}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E^y}{\partial t} + \frac{c\partial B^z}{\partial x} - \frac{c\partial B^x}{\partial z} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} - c\nabla \times \mathbb{B}\right)^y$$

$$\partial_\mu F^{\mu 3} = \frac{1}{c}\frac{\partial F^{03}}{\partial t} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x} + \frac{\partial F^{23}}{\partial y} + \frac{\partial F^{33}}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E^z}{\partial t} - \frac{c\partial B^y}{\partial x} + \frac{c\partial B^x}{\partial y} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} - c\nabla \times \mathbb{B}\right)^z$$

Notemos que essas 4 componentes são exatamente as combinações de campo elétrico e magnético que aparecem nas 4 equações de Maxwell restantes. Então, definindo o 4-vetor <u>densidade de corrente</u> pelas componentes

$$j^\mu = (c\rho, \mathbb{J}) \,, \qquad (\mathrm{XLV})$$

temos que as equações de Maxwell restantes são equivalentes a:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{-1}{\epsilon_0 c}\, j^\nu} \,, \qquad (\mathrm{XLVI})$$

lembrando que $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$.

Exercício: Utilizando a relação entre $F_{\mu\nu}$ e as componentes de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$, deduza a equação de transformação das componentes dos campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ por "boosts".

Exercício: Mostre que as Eqs. de Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu$ implicam na conservação de carga elétrica, $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Exercício: Mostre que uma maneira de escrever as Eqs. de Maxwell $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ e $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$ é pela equação tensorial

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \qquad (\text{XLVIII})$$

e que essa equação é identicamente satisfeita se $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Exercício: Considere uma partícula carregada com carga q em repouso num certo referencial inercial S. Sabemos que nesse caso a força eletromagnética sentida por essa carga é puramente elétrica e é dada por

$$\vec{f}_e = q\vec{E}.$$

a) Mostre que essa força pode ser escrita em forma de tensores pela expressão $f^\mu = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu v^\nu$, onde v^μ é a 4-velocidade da carga;

b) Sendo a expressão do item anterior uma equação tensorial, deduza a expressão da força de Lorentz, $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$;

c) Mostre que a 4-aceleração produzida pela força eletromagnética de fato é ortogonal à 4-velocidade da partícula, ou seja, que $\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{f^\mu}{m} u^\nu = 0$.

Exercício: Sendo $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ as componentes do tensor de Levi-Civita (totalmente antissimétrico), com $\epsilon_{0123} = +1$, calcule as componentes do tensor dual ao tensor de Faraday, definido por

$$F^*_{\mu\nu} := \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{2!} F^{\alpha\beta} \qquad (\text{XLIX})$$

Exercício: Calcule os escalares $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $F^{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}$ em função dos campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$. Interprete os resultados.

Exercício: Mostre que os 4-vetores E^μ e B^μ definidos por

$$E^\mu := \frac{F^\mu{}_\nu u^\nu}{c} \quad \text{e} \quad B^\mu := -\frac{1}{2c^2} \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} F^{\alpha\beta} u^\gamma \qquad (\text{L})$$

são os campos elétrico e magnético, respectivamente, assim como medidos por um observador com 4-velocidade u^μ.

Exercício: Mostre que A_μ e $\tilde{A}_\mu := A_\mu + \partial_\mu \chi$, com χ sendo uma função escalar arbitrária (de classe C^2), dão origem ao mesmo tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$. (Liberdade de "gauge")

Exercício: Utilizando as definições de E^μ e B^μ dadas acima, reobtenha as transformações dos campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ por "boosts" e compare com o primeiro exercício da página anterior.

Observáveis como Escalares

Na seção anterior argumentamos que os objetos matemáticos adequados para se usar na descrição de fenômenos físicos são os tensores. A razão reside no fato de que tensores são objetos cuja existência independe da presença ou não de sistemas de coordenadas. Sendo assim, uma equação construída utilizando-se apenas tensores, se válida em um sistema de coordenadas, será válida em qualquer sistema de coordenadas.

Exercício: Demonstre esta última afirmação

De particular importância em uma teoria física são os observáveis da teoria, ou seja, as grandezas cujos valores são mensuráveis. Evidentemente, o valor de fato medido para um dado observável qualquer depende tanto do estado em que o sistema físico se encontra, quanto do (estado de movimento e orientação espacial do) observador que, porventura, efetue a medição do observável em questão. Uma vez fixados o estado físico em que o sistema se encontre e o observador que efetuará as medições, os valores medidos para os observáveis do sistema ficam completamente determinados. Em particular, o valor dos observáveis são totalmente independentes do sistema de coordenadas utilizado para se realizar os cálculos (lembrem-se que "sistema de coordenadas" e "observadores" são conceitos distintos). Em outras palavras, os observáveis de uma teoria física podem ser definidos como grandezas escalares construídas a partir de tensores que descrevem o sistema (4-momento, 4-força, 4-velocidade, tensor de Faraday, etc...) e do conjunto de vetores ortonormais $\{\frac{u^\mu}{c}, e_x^\mu, e_y^\mu, e_z^\mu\}$, onde u^μ é a 4-velocidade o observador que efetua a medição do observável e $\{e_x^\mu, e_y^\mu, e_z^\mu\}$ caracterizam sua orientação espacial.

• Exemplos:

→ Energia de uma partícula com massa (de repouso) m e 4-velocidade v^μ:

Vimos que o 4-momento de uma partícula é dado por $p^\mu := m v^\mu$, onde, num sistema inercial qualquer as componentes tomam a forma

$$p^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) = (E/c, \vec{p})$$

Ou seja, é comum atribuir a interpretação de "Energia dividida pela velocidade da luz" para a componente temporal do 4-momento, e de "3-momento" para as componentes espaciais. Essa atribuição só é possível porque a maneira como construímos nossos sistemas de coordenadas inerciais utilizaram critérios físicos para as coordenadas x^μ (vide página 1). Porém, o conceito de sistema de coordenadas é muito mais amplo e, em geral, nenhuma interpretação física pode ser diretamente atribuída às componentes de tensores.

No caso acima, a energia que aparece na componente temporal de p^μ é a energia da partícula assim como medida pelos observadores parados no referencial em questão, cuja 4-velocidade, portanto, é dada por

$$u^\mu = (c, \vec{0}).$$

É fácil ver que a energia assim como medida por esses observadores pode ser obtida a partir da equação escalar

$$E = -p^\mu u_\mu = -\eta_{\mu\nu} p^\mu u^\nu . \qquad \text{(LI)}$$

A vantagem da equação (LI) é que, sendo uma equação tensorial, e sendo obviamente válida no sistema de coordenadas inercial no qual o observador está parado, (LI) é válida em qualquer sistema de coordenadas. Em particular, note que a energia da partícula assim como medida por um observador em repouso com a partícula (ou seja, com a mesma 4-velocidade da partícula, $u^\mu = v^\mu$) é dada por:

$$E_0 = -p^\mu u_\mu = -m v^\mu v_\mu = +mc^2 \quad \text{(energia de repouso)},$$

independente do estado de movimento dessa partícula.

→ Momento de uma partícula com massa (de repouso) m e 4-velocidade v^μ:

A seção espacial de um observador com 4-velocidade u^μ é o subespaço de $\mathbb{M}$ gerado pelos vetores e^μ ortogonais (no sentido de Minkowski) à 4-velocidade u^μ. Como $\mathbb{M}$ é 4-dimensional, o subespaço ortogonal ao vetor u^μ é 3-dimensional; ou seja, existem 3 vetores $\{e_1^\mu, e_2^\mu, e_3^\mu\}$ linearmente independentes satisfazendo

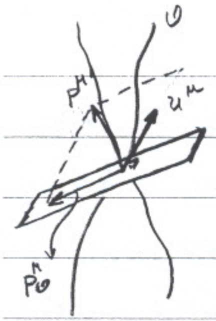
$$\eta_{\mu\nu} u^\mu e_i^\nu = 0, \quad i = 1,2,3$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher e_i^μ normalizados e ortogonais entre si:

$$\eta_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = \delta_{ij}$$

Em resumo, $\{\frac{u^\mu}{c}, e_i^\mu ; i = 1,2,3\}$ é uma base tetrada.

O 3-momento $\vec{P}_0$ que o observador $\mathcal{O}$ com 4-velocidade u^μ atribui à partícula com 4-momento p^μ é dado pela projeção de p^μ no espaço ortogonal a u^μ (vide figura). Essa projeção é obtida através de:



$$p_{\mathcal{O}}^\mu := p^\mu - \frac{(\eta_{\alpha\beta}\, p^\alpha u^\beta)\, u^\mu}{\eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{\mathcal{O}}^\mu = \left(\delta^\mu_\nu + \frac{u^\mu u_\nu}{c^2} \right) p^\nu =: h^\mu{}_\nu\, p^\nu , \qquad \text{(LII)}$$

onde $h^\mu{}_\nu := \delta^\mu_\nu + \dfrac{u^\mu u_\nu}{c^2}$ é um tensor que projeta vetores em $\mathbb{M}$ no espaço perpendicular à 4-velocidade u^μ. Note que, de fato, se adotarmos como sistema de coordenadas o referencial onde o observador $\mathcal{O}$ está em repouso [ou seja, onde $u^\mu = (c, \vec{0})$], então teremos:

$$p_{\mathcal{O}}^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) + \frac{1}{c^2}(c, \vec{0})\cdot(-m\gamma c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{\mathcal{O}}^\mu = (0, m\gamma\vec{v}) = (0, \vec{p})$$

Se, quisermos saber qual o momento da partícula que o observador $\mathcal{O}$ mede na direção do vetor espacial e^μ, basta projetarmos $p_{\mathcal{O}}^\mu$ na direção de e^μ (com $\eta_{\mu\nu} e^\mu e^\nu = 1$):

$$p_{\mathcal{O},e} := p_{\mathcal{O}}^\mu e^\nu \eta_{\mu\nu} = \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) p^\mu e^\nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{\mathcal{O},e} = \eta_{\mu\nu}\, p^\mu e^\nu} , \qquad \text{(LIII)}$$

onde foi usado que $\eta_{\mu\nu} u^\mu e^\nu = 0$. Mais uma vez, temos um escalar como observável.

→ Campo elétrico:

Sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor eletromagnético de Faraday, o campo elétrico medido por um observador com 4-velocidade u^{μ} na direção espacial e^{μ} é dado por:

$$E_{e} := E^{\mu} e^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{c} e^{\mu} u^{\nu} \qquad (\mathrm{LIV})$$

→ Campo magnético:

O campo magnético medido por um observador com 4-velocidade u^{μ}, na direção e^{μ}, é dado por:

$$B_{e} := B^{\mu} e^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2c^{2}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} u^{\alpha} e^{\beta} \qquad (\mathrm{LV})$$

Exercício: Mostre que as equações (LIV) e (LV) são consistentes com a forma matricial dada em (XLIV).