Lista de Exercícios para a P3

① Seja $\{(c\tau, \zeta^j)\}$ um sistema de coordenadas cartesiano uniformemente acelerado e seja v^a a 4-velocidade de uma partícula livre.

(a) Mostre, abrindo explicitamente a equação da geodésica em componentes, que a componente v_0 do covetor $v_a = g_{ab}v^b$, na base coordenada associada a $\{(c\tau, \zeta^j)\}$, é uma constante de movimento da partícula livre.

Agora, considere o campo 4-vetorial ξ^a cujas componentes nessas coordenadas são $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (ou seja, $\xi^a = \partial_0^a$).

(b) Mostre que $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$;

(c) Reobtenha o resultado do item (a) apenas analisando a equação que $\xi^a v_a$ satisfaz;

(d) Seguindo a mesma estratégia dos itens (b) e (c), tente encontrar mais duas constantes de movimento para a partícula livre.

② Utilizando o sistema de coordenadas que mais lhe convier, pede-se:

(a) Obtenha todas as soluções linearmente independentes da equação de Killing no espaço-tempo de Minkowski;

(b) Sendo p^a o 4-momentum de uma partícula *livre*, expresse, em termos das componentes de p^a, todas as constantes de movimento obtidas a partir de $p^a\xi_a$ — com ξ^a sendo cada uma das soluções independentes da equação de Killing;

(c) Selecione 3 das constantes de movimento encontradas acima e expresse todas as outras em termos delas. Em seguida, veja se reconhece o conteúdo físico de cada uma dessas “leis de conservação”.

③ As componentes do 4-momentum de uma partícula, num dado sistema de coordenadas cartesiano inercial S, valem $p^\mu = (2e, e, e, 0)$, onde $e > 0$ é uma constante.

(a) Qual a massa de repouso dessa partícula?

(b) Qual a velocidade $\vec{V}$ dessa partícula em relação ao referencial S?

(c) Se essa partícula se desintegrar em dois fótons com energias *iguais*, quais as componentes, em S, do 4-momentum de cada fóton produzido?

(d) Refaça a análise da desintegração do ponto de vista do referencial de respouso da partícula inicial.

④ Considere uma partícula carregada qualquer, com massa de repouso m fixa (um elétron, por exemplo).

(a) Mostre que essa partícula não pode absorver radiação (fótons) se estiver livre;

(b) Mostre que essa partícula não pode emitir radiação (fótons) se seu movimento for inercial, por maior que seja sua energia;

(c) (*Efeito Compton*) Analise o espalhamento de um fóton por essa partícula carregada em repouso, obtendo a relação entre o ângulo de espalhamento e a variação do comprimento de onda do fóton espalhado em relação ao do fóton incidente.

⑤ (*Observáveis como escalares*) Seja p^a o 4-momentum de uma partícula com massa de repouso m e seja u^a a 4-velocidade de um observador $\mathcal{O}$ no evento em que ambos, partícula e observador, se cruzam.

(a) Mostre que a energia da partícula, medida por $\mathcal{O}$ no evento em que se cruzam, é dada por $\mathcal{E}_{\mathcal{O}} = -p^a u_a$.

Considere, agora, um próton de um raio cósmico se propagando pelo universo, imerso na radiação cósmica de fundo (RCF — uma radiação térmica de natureza eletromagnética que permeia todo o Universo, com temperatura $T \approx 2{,}7$ K). Sendo m_p ($\approx 0{,}94$ GeV/c^2) a massa de repouso do próton, pede-se:

(b) Se a energia do próton vale $\mathcal{E}_p$ no referencial em que a RCF é isotrópica, qual a energia "típica" dos fótons colidindo frontalmente com o próton, em relação ao próprio próton? (Considere que a energia "típica" dos fótons da RCF vale $k_B T$ no referencial em que ela é isotrópica, onde $k_B \approx 8{,}6 \times 10^{-5}$ eV/K é a constante de Boltzmann.)

(c) Considere o seguinte processo, chamado foto-produção de píons:

$$\text{próton} + \text{fóton} \to \Delta^+ \to \begin{cases} \text{próton} + \text{píon}^0 \\ \text{nêutron} + \text{píon}^+ \end{cases},$$

onde Δ^+ é uma partícula com massa de repouso $m_\Delta \approx 1{,}23\ \mathrm{GeV}/c^2$. Qual a energia do fóton, no referencial do próton, para que esse processo ocorra?

(d) Combinando os resultados dos itens anteriores, estime a energia dos prótons de raios cósmicos a partir da qual a reação de fotoprodução de píons passa a ocorrer eficientemente? Qual o efeito sobre os prótons (ou nêutrons) produzidos ao final do processo? (Dado: a massa de repouso dos píons é da ordem de $10^2\ \mathrm{MeV}/c^2$.)

⑥ Considere uma haste unidimensional de comprimento próprio L_0 com *massa de repouso desprezável*, que no seu referencial (inercial) está sujeita a uma tensão provocada por forças opostas $\pm\vec{F}_0$, aplicadas em suas extremidades e alinhadas com seu eixo (comprimindo-a)

(a) Determine as componentes do tensor de energia-momentum-estresse $T'^{\mu\nu}$ dessa haste no referencial de repouso da mesma; (Sugestão: considere a haste alinhada com um dos eixos do sistema de coordenadas cartesiano.[1])

(b) Calcule $\partial'_\nu T'^{\mu\nu}$ e interprete o resultado;

(c) Calcule as componentes $T^{\mu\nu}$ num referencial no qual a haste se move com velocidade constante $\vec{V}$ fazendo um ângulo θ com o eixo da haste; (Sugestão: Se você seguiu a sugestão dada no item (a), antes de fazer a mudança para o novo referencial inercial, em relação ao qual a haste se move, faça uma rotação "apropriada" dos eixos cartesianos no sistema de coordenadas inicial para obter as componentes do tensor energia-momentum-estresse de uma haste que não está alinhada com os eixos cartesianos.)

(d) Calcule a massa total M da haste nesse referencial, assim como seu momentum total $\vec{P}$. Verifique que, ao contrário do que ocorre em mecânica newtoniana, $\vec{P} - M\vec{V} \neq \vec{0}$. Calcule essa diferença e interprete-a em termos de conceitos relativísticos simples (como "$E = mc^2$").

⑦ *Fluido perfeito* é uma idealização de um fluido que não possui viscosidade, cisalhamento, nem conduz calor. Matematicamente, é descrito

[1] A solução deste item será fornecida apenas para propósitos de conferência. Mas é importante que pelo menos se tente resolvê-lo antes de olhar a solução.

pelo tensor energia-momentum-estresse da forma

$$T^{ab} = \rho v^a v^b + P\left(g^{ab} + \frac{v^a v^b}{c^2}\right),$$

onde ρ e P são, respectivamente, sua densidade de massa e sua pressão isotrópica medidos no *referencial de repouso* do fluido, e v^a é sua 4-velocidade (todas essas quantidades podendo variar ponto a ponto).

(a) Mostre que, de fato, um observador "co-móvel" com o fluido (ou seja, com 4-velocidade $u^a = v^a$) atribui ao fluido uma densidade de energia ρc^2 e uma pressão P. Além disso, calcule a densidade de momentum do fluido para esse mesmo observador;

(b) Calcule a densidade de energia observada por um outro observador qualquer em função da velocidade V relativa entre ele e o fluido. Em seguida, impondo a *condição física* de que a densidade de energia não pode ser negativa para *nenhum* observador (chamada *condição de energia fraca*), obtenha um limite para o quão negativa a pressão P pode ser.

⑧ Uma espira circular de raio R está eletricamente nêutra e conduz corrente de intensidade I de acordo com observadores em repouso em relação a ela.[2]

(a) Escreva explicitamente as componentes j'^{μ} da 4-densidade de corrente que caracteriza essa espira no referencial cartesiano inercial em que ela se encontra parada;

(b) Calcule as componentes j^{μ} num referencial cartesiano inercial em relação ao qual a espira se move com velocidade $\vec{V} = (V, 0, 0)$ e extraia informação sobre a densidade de carga e a corrente na espira nesse referencial;

(c) Relacione os momentos de dipolo elétrico e magnético da espira nesses referenciais.

⑨ Um observador *arbitrário* caracterizado pela 4-velocidade u^a observa um campo eletromagnético F_{ab} separado numa parte elétrica $\mathbf{E}^a$ e numa parte magnética $\mathbf{B}^a$ de modo que

$$F_{ab} = \frac{1}{c}\left(u_a \mathbf{E}_b - u_b \mathbf{E}_a\right) + \epsilon_{abcd}\mathbf{B}^c u^d$$

[2] A solução deste exercício será disponibilizada apenas devido a possíveis dificuldades de cálculo. Mas tente resolvê-lo antes de consultar a solução.

(a) Calcule $F_{ab}F^{ab}$ e argumente que, embora $E := \sqrt{\mathbf{E}_a\mathbf{E}^a}$ e $B := \sqrt{\mathbf{B}_a\mathbf{B}^a}$ sejam quantidades *dependentes* de observador, a combinação $E^2 - c^2B^2$ é independente de observador;

(b) Obtenha a expressão do tensor eletromagnético dual, ${}^*F_{ab} := \epsilon_{abcd}F^{cd}/2$, em termos de $\mathbf{E}^a$ e $\mathbf{B}^a$, calcule ${}^*F_{ab}F^{ab}$ e obtenha mais uma quantidade calculada em termos de $\mathbf{E}^a$ e $\mathbf{B}^a$ que independe de observador;

(c) "Inverta" a expressão de F_{ab} dada acima e obtenha $\mathbf{E}^a$ e $\mathbf{B}^a$ em termos de F_{ab} e u^a (além do tensor de Levi-Civita e da métrica, se necessários).

⑩ Num referencial inercial cartesiano S há um campo elétrico uniforme apenas na direção x, $\vec{E} = (E, 0, 0)$, e não há campo magnético. Considere agora um observador $\mathcal{O}$ em movimento circular uniforme em relação a S, com trajetória de raio R contida no plano xy e com velocidade angular Ω. Pede-se:

(a) Construa o tensor F_{ab} associado a esse campo eletromagnético. Deixe claro o valor de suas componentes e a base escolhida para expressá-las;

(b) Obtenha os *módulos* $E'(\tau)$ e $B'(\tau)$ dos campos elétrico e magnético medidos pelo observador $\mathcal{O}$ (na sua posição), como função de seu tempo próprio τ?

(c) Qual a relação entre as direções do campo elétrico e do campo magnético medidos pelo observador $\mathcal{O}$? Justifique. (Sugestão: relembre resultados do exercício anterior.)