Dicas Lista Exercícios 1

1 Variáveis Aleatórias Contínuas

Exercício 3 Observem que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda \cdot x}, & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \cdot x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Como usar a Tabela da Distribuição Normal qdo temos uma Normal com $\mu \neq 0$ e $\sigma^2 \neq 1$. Seja X uma v.a. com distribuição Normal de média μ e variância σ^2. Podemos tornar X uma v.a. com distribuição Normal Padrão, se fizermos a seguinte transformação:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = g(X) = Y,$$

onde $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}$ é o desvio-padrão. Agora Y tem distribuição Normal Padrão. O que está por trás disso é o fato de qualquer v.a. X ter a mesma distruibuição que a v.a. $aX + b$, que é a transformação linear de X.
Exercício 6 Temos Z uma v.a. com distribuição Normal de média $\mu = 6$ e variância $\sigma^2 = 25$. No item (d) temos que calcular a $\mathbb{P}(Z > 21)$. Para usar a tabela discutida em aula temos que transformar Z em uma v.a. normal padrão. Então

$$\{Z > 21\} = \left\{ \frac{Z - \mu}{\sigma} > \frac{21 - \mu}{\sigma} \right\} = \left\{ \frac{Z - 6}{5} > \frac{21 - 6}{5} \right\} = \{Y > 3\}.$$

Então encontrar $\mathbb{P}(Z > 21)$ é equivalente a encontrar $\mathbb{P}(Y > 3)$, com Y sendo uma v.a. com com distribuição Normal Padrão, e podemos usar a tabela.
Concluindo, $\mathbb{P}(Y > 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 3) = 1 - 0.9987$. **Exercício 6**

(a) $\mathbb{P}(6 \leq Z \leq 12) = \mathbb{P}(6 - \mu \leq Z - \mu \leq 12 - \mu)$
$= \mathbb{P}((6 - \mu)/\sigma \leq (Z - \mu)/\sigma \leq (12 - \mu)/\sigma)$
$= \mathbb{P}((6 - 6)/5 \leq X \leq (12 - 6)/5) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq 6/5)$. Agora estamos tratando de uma v.a. X que é normal padrão e procedemos da mesma maneira que no exercício anterior.

(b) $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 8) = \mathbb{P}(0 - \mu \leq Z - \mu \leq 8 - \mu) =$
$= \mathbb{P}((0 - \mu)/\sigma \leq (Z - \mu)/\sigma \leq (8 - \mu)/\sigma)$
$= \mathbb{P}((0 - 6)/5 \leq X \leq (8 - 6)/5) = \mathbb{P}(-6 \leq X \leq 2/5)$

(e) $\mathbb{P}(|Z-6|<5) = \mathbb{P}(-5<Z-6<5) = \mathbb{P}(-5/\sigma<(Z-6)/\sigma<5/\sigma)$
$= \mathbb{P}(-5/5<X<5/5) = \mathbb{P}(-1<X<1)$

(h) Encontre a função geradora de momentos de Z: Não precisa fazer inteiro. Apenas pegue nas notas de aula a $M(t)$ encontrada e substitua os valores de μ e σ.

Exercício 5

(a) $\{0.53<Z\leq 2.06\} = \{Z\leq 2.06\} - \{Z\leq 0.53\}$. Lembrando que se $A\subset B$, então $\mathbb{P}(B-A) = \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)$. Então temos que

$\mathbb{P}(0.53<Z\leq 2.06) = \mathbb{P}(Z\leq 2.06) - \mathbb{P}(Z\leq 0.53)$

$= \mathbb{P}(X\leq 2.06) - \mathbb{P}(X\leq 0.53)$.

(b) $\{-0.79<Z\leq 1.52\} = \{Z\leq 1.52\} - \{Z\leq -0.79\}$. Lembrando que se $A\subset B$, então $\mathbb{P}(B-A) = \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)$. Então temos que

$\mathbb{P}(-0.79<Z\leq 1.52) = \mathbb{P}(Z\leq 1.52) - \mathbb{P}(Z\leq -0.79)$

$= \mathbb{P}(X\leq 1.52) - \mathbb{P}(X\leq -0.79) = \mathbb{P}(X\leq 1.52) - (1-\mathbb{P}(X\leq 0.79))$.

(c) mesmo raciocínio anterior, $= \mathbb{P}(X\leq -0.51) - \mathbb{P}(X\leq -2.63) = (1-\mathbb{P}(X\leq 0.51) - (1-\mathbb{P}(X\leq 2..63))$.

(d) $\mathbb{P}(Z>2.89) = 1-\mathbb{P}(Z\leq 2.89)$,

(e) $\mathbb{P}(|Z|<1.96) = \mathbb{P}(-1.96<Z<1.96)$. É o mesmo raciocínio usado no item (a)

Exercício 8 Ao invés de resolver esse exercício vou solucionar outro totalmente parecido.

Seja X uma Normal com $\mu = 25$ e $\sigma^2 = 36$. Econtre c tal que $\mathbb{P}(|Z-25|\leq c) = 0.9544$.

$$\mathbb{P}\left(|Z-25|\leq c\right) = \mathbb{P}\left(-c\leq Z-25\leq c\right) = \mathbb{P}\left(\frac{-c}{6}\leq\frac{Z-25}{6}\leq\frac{c}{6}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{-c}{6}\leq X\leq\frac{c}{6}\right) = \mathbb{P}\left(X\leq\frac{c}{6}\right) - \mathbb{P}\left(X\leq\frac{-c}{6}\right) = \mathbb{P}\left(X\leq\frac{c}{6}\right) - \left(1-\mathbb{P}\left(X\leq\frac{c}{6}\right)\right) = 0.9544.$$

Agora é só isolar

$\mathbb{P}\left(X\leq\frac{c}{6}\right)$