Planejamento de Rotas – Parte I
Regiões Convexas

SSC5955

Slides adaptados de Masahiro Ono - MIT

Sumário

- Problema de Planejamento de Rotas
- Kinodynamic path planning
- Abordagem para Planejamento de Rota
  - Programação Linear (PL)
  - Programação Inteira (PI)
  - Programação Linear Inteira Mista (PLIM)
- Exemplo
- Receding Horizon Control
- **MPC** (model-predictive control)

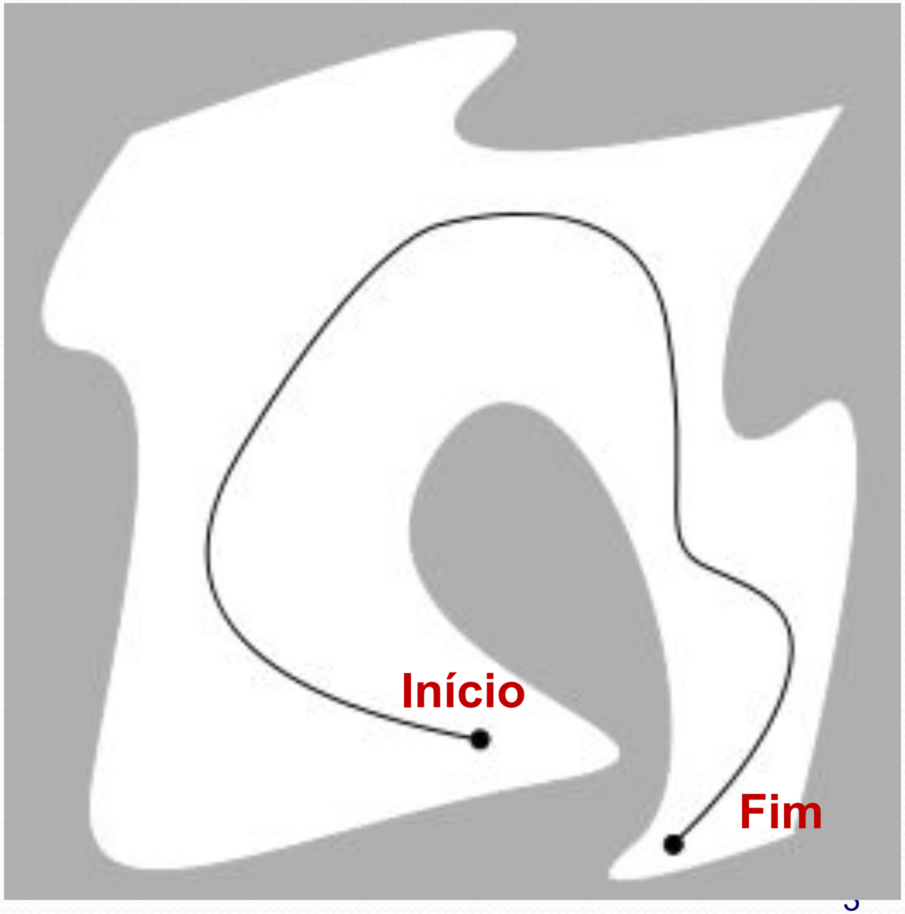
Problema de Planejamento de Rota

$$\min_{r} C(r)$$

$$s.t.$$

$$r \in R$$

r: **rota**
R: **Conjunto de rotas possíveis**
C: **função de custo**



Back

from UFSCar - Rodovia Washington Luís, 310, São Car...
ICMC - São Carlos - Avenida Trabalhador Sancarlen...

1 h (4.8 km)

via R. Bernardino Fernandes Nunes

Turn left toward R. das Gralhas
Go through 1 roundabout
250 m

Continue onto R. das Gralhas
300 m

At the roundabout, take the 1st exit
Go through 2 roundabouts
550 m

At the roundabout, take the 1st exit onto R. Kenneth Gilbert Herrick
Go through 1 roundabout
1.0 km

Turn left onto Rua Ray Wesley Herrick
94 m

Slight right to stay on Rua Ray Wesley Herrick
170 m

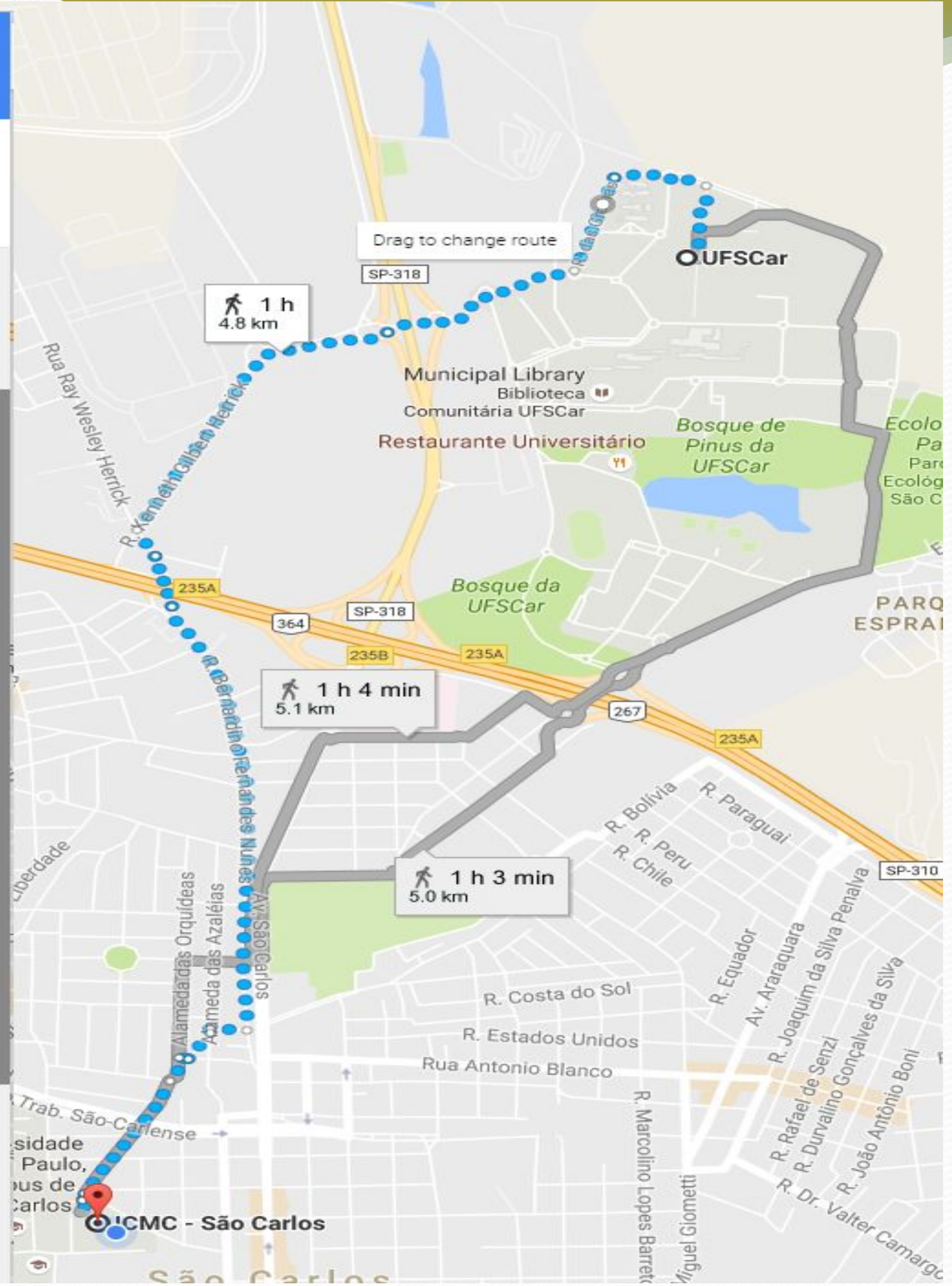
Continue onto R. Bernardino Fernandes Nunes
1.4 km

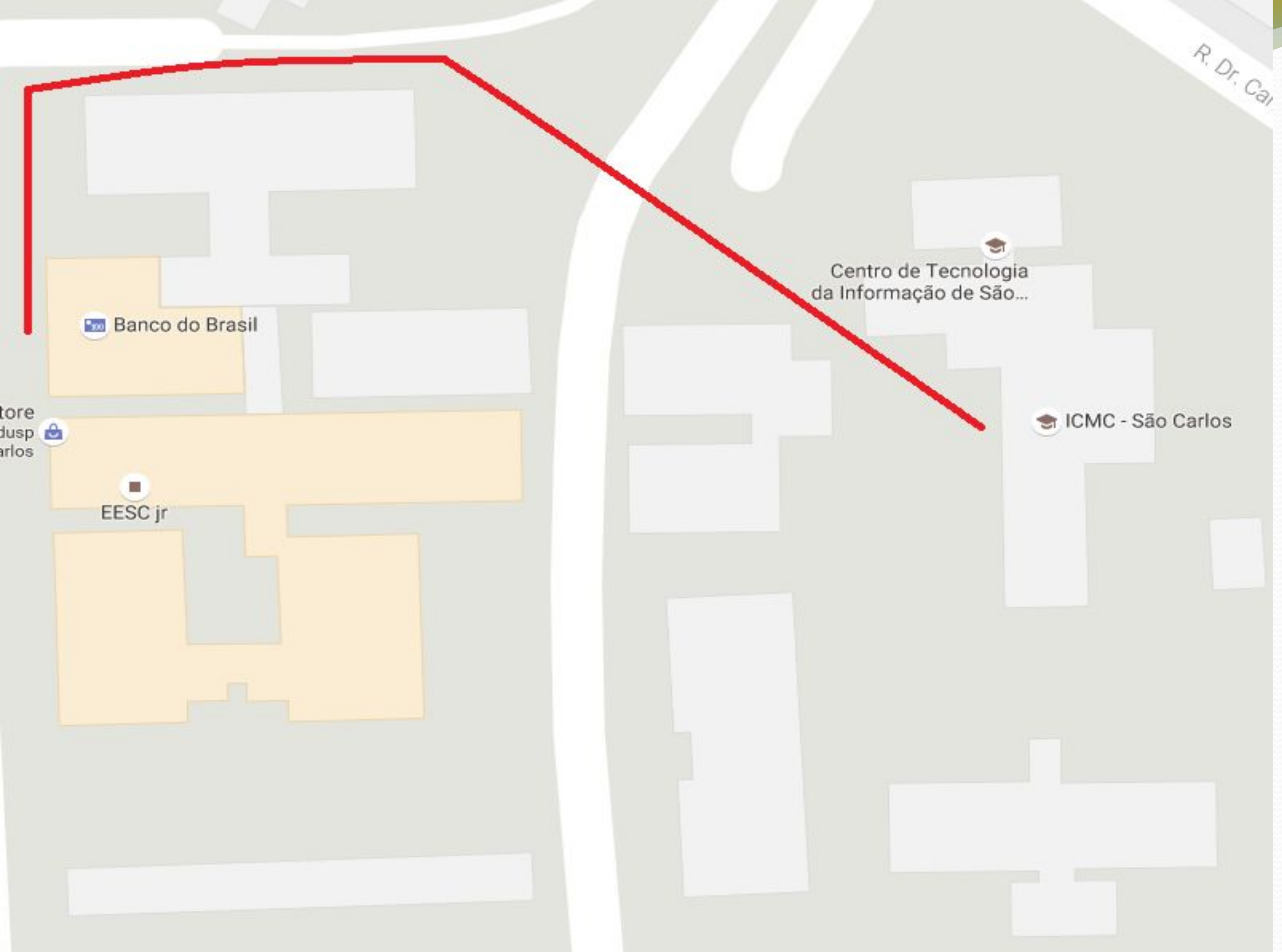
Turn right toward Alameda das Azaléias
92 m

Turn left onto Alameda das Azaléias
15 m

Slight right to stay on Alameda das Azaléias
98 m

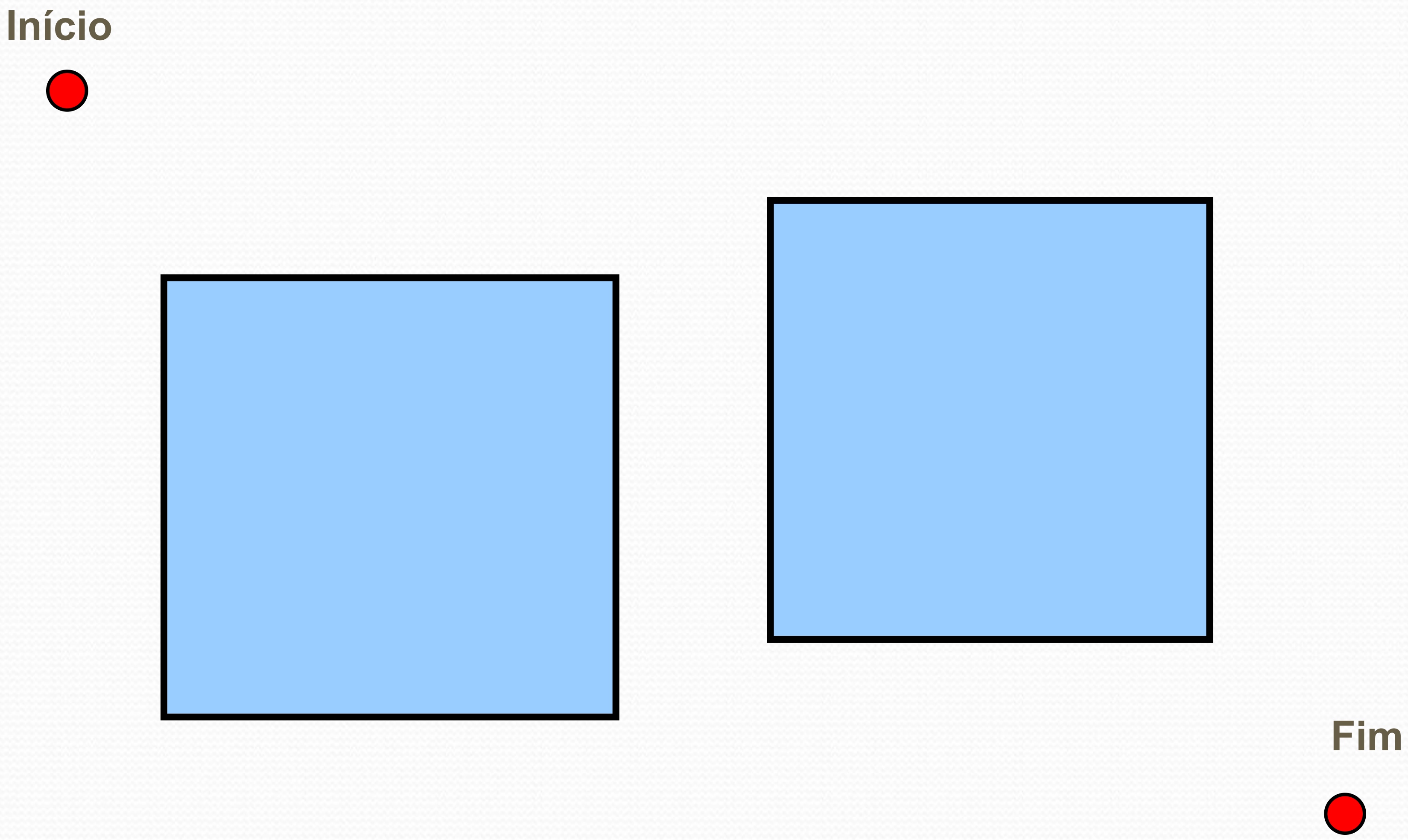
Turn right onto R. dos Jasmins
24 m





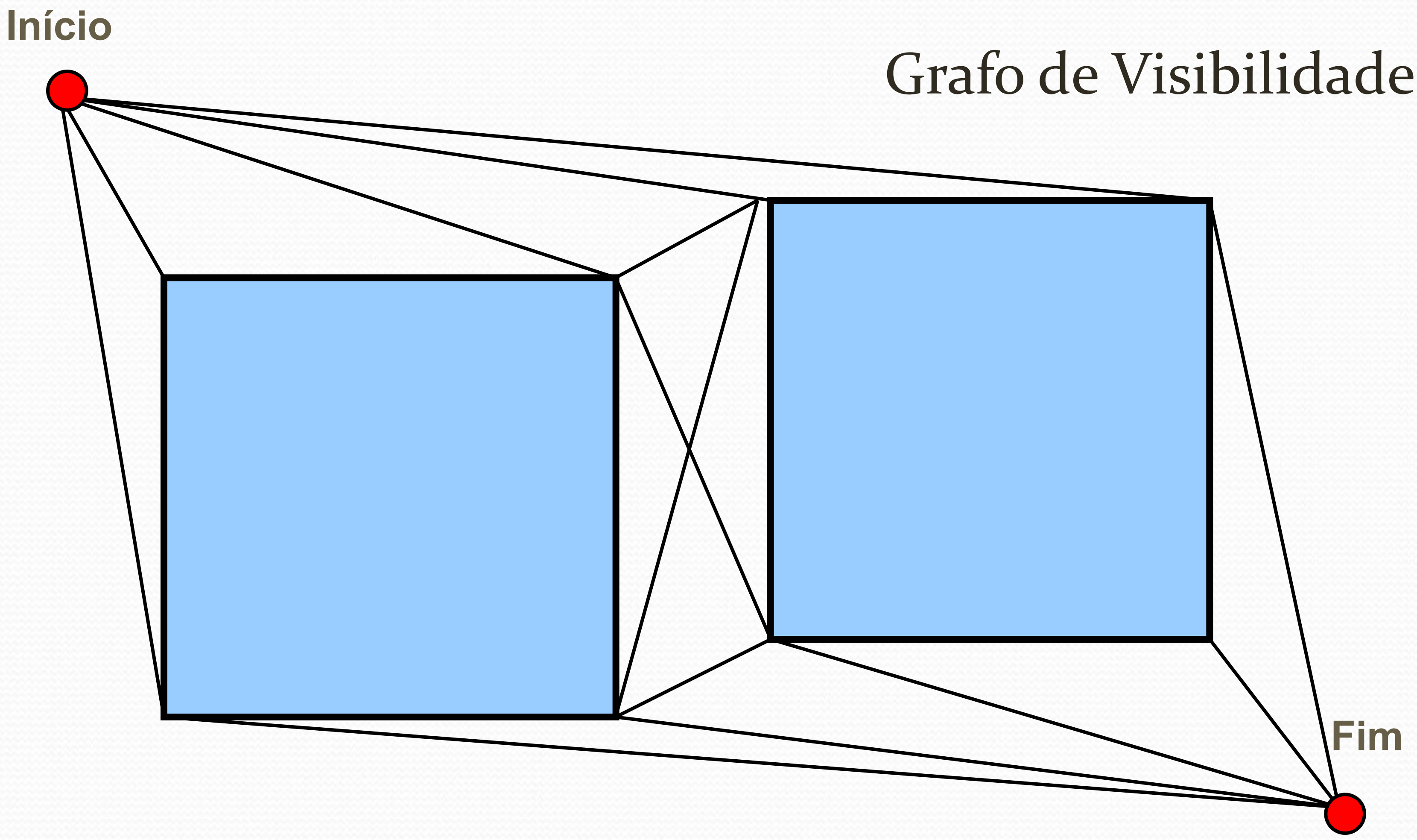
R. Dr. Ca
Centro de Tecnologia
da Informação de São...
Banco do Brasil
ICMC - São Carlos
tore
dusp
arlos
EESC jr

Problema de Planejamento de Rota



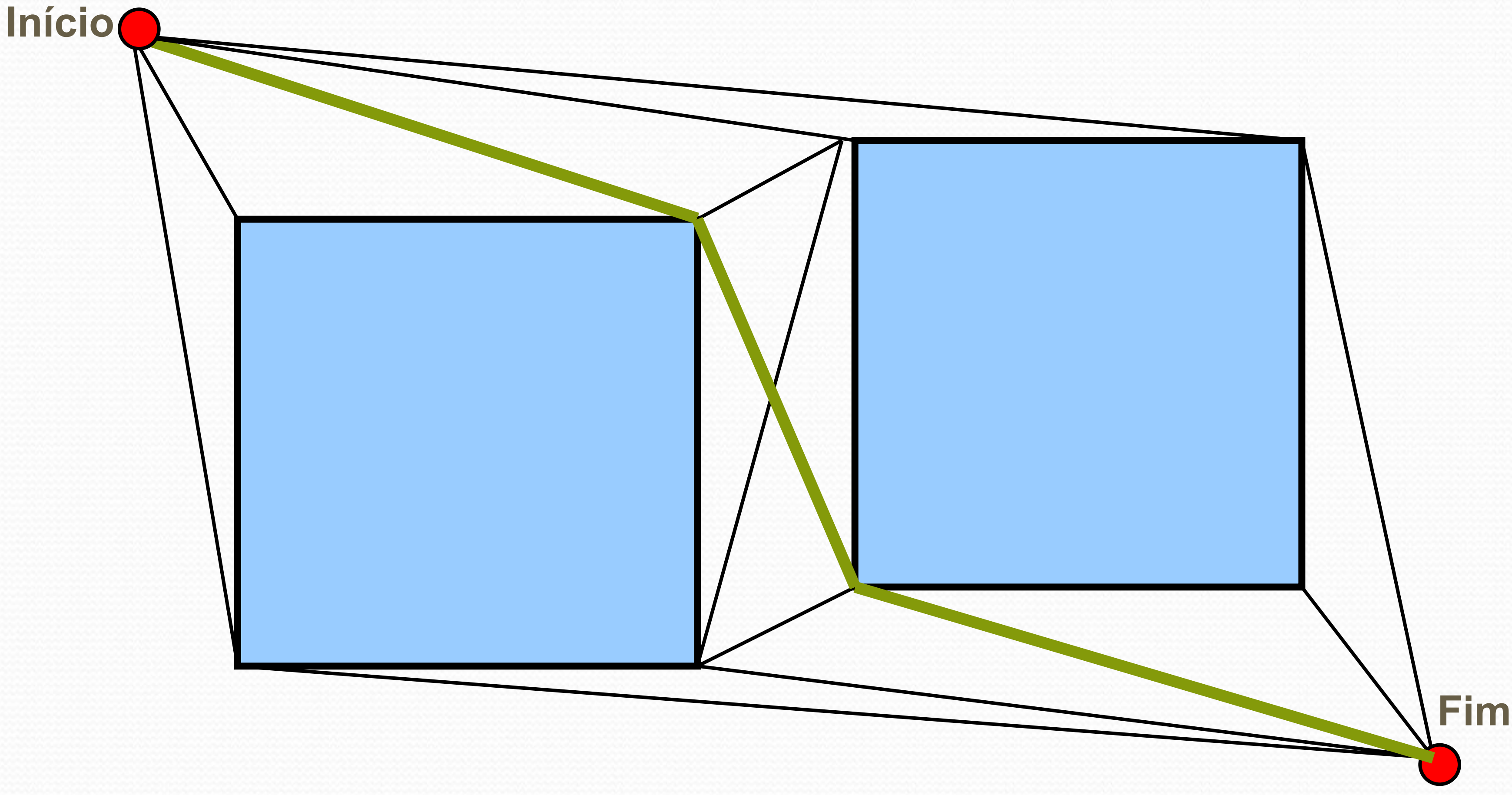
Problema de Planejamento de Rota

Grafo de Visibilidade

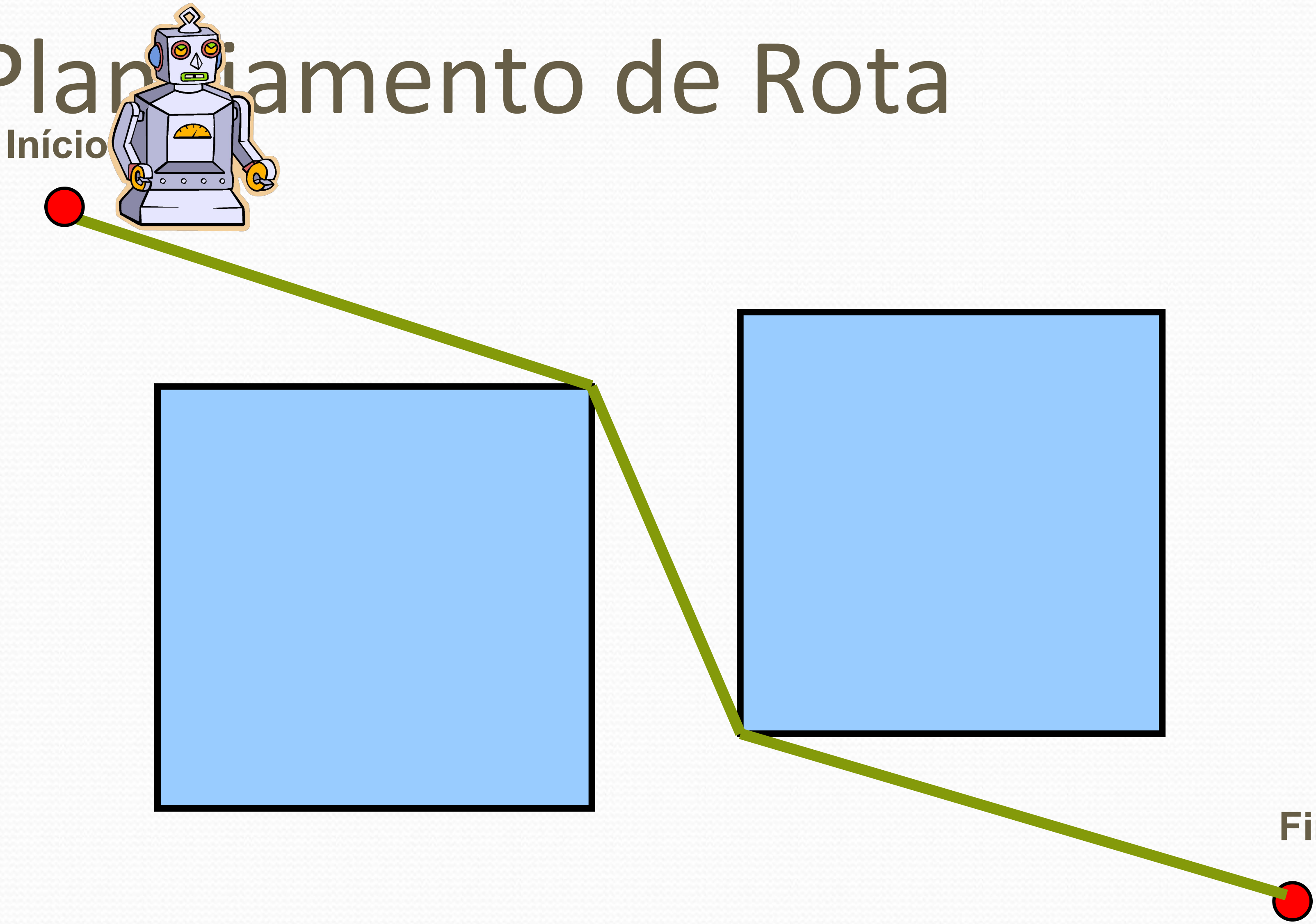


Planejamento de Rota

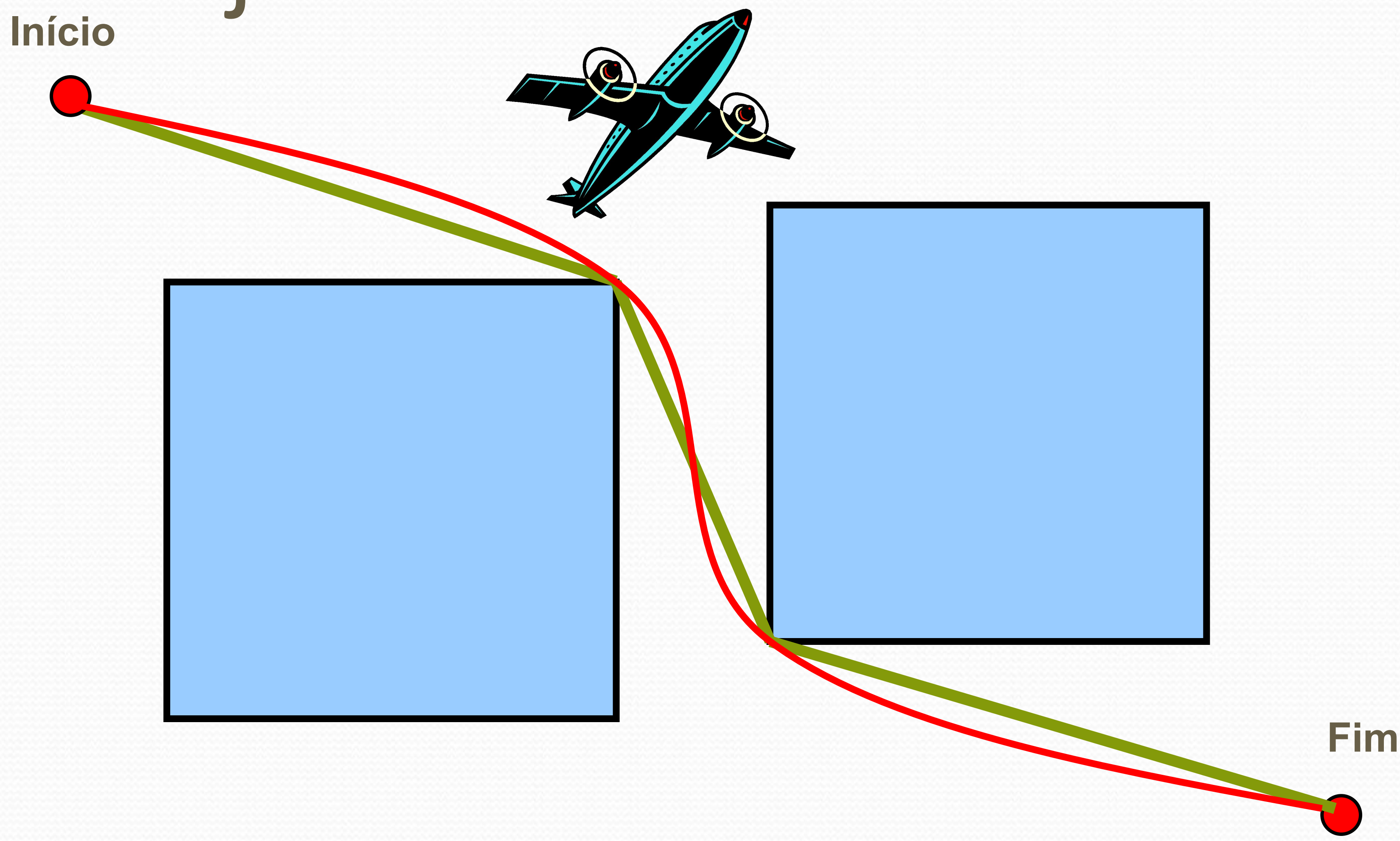
Grafo de Visibilidade + Algoritmo de Busca (Dijkstra, A*, etc)



Planejamento de Rota



Planejamento de Rota



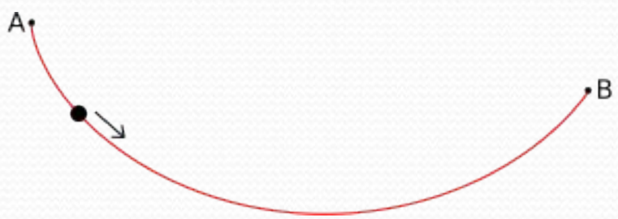
Kinodynamic Path Planning

- Veículos que executem uma trajetória em alta velocidade podem ter dificuldade para seguir a trajetória estabelecida.

- A dinâmica do veículo precisa ser explicitamente considerada. Isso caracteriza o chamado *Kinodynamic path planning*.

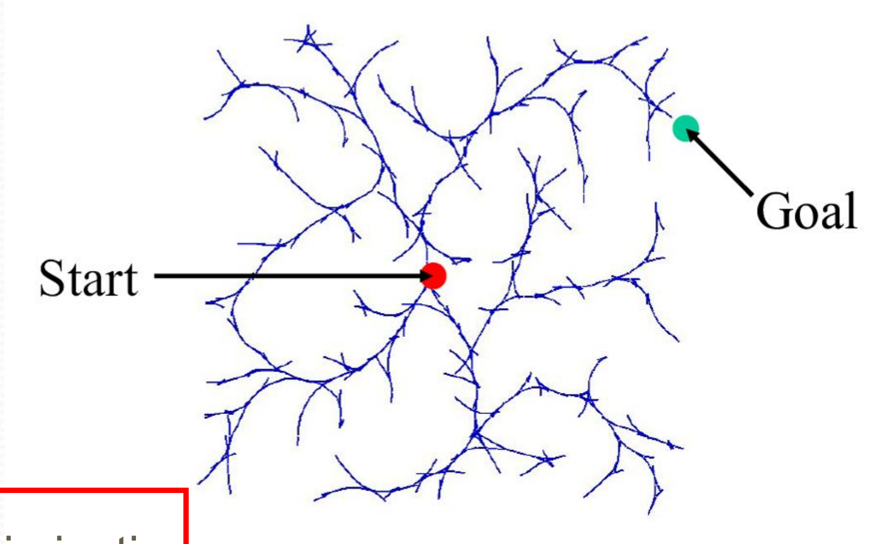
Kinodynamic Path Planning

Calculus of variations

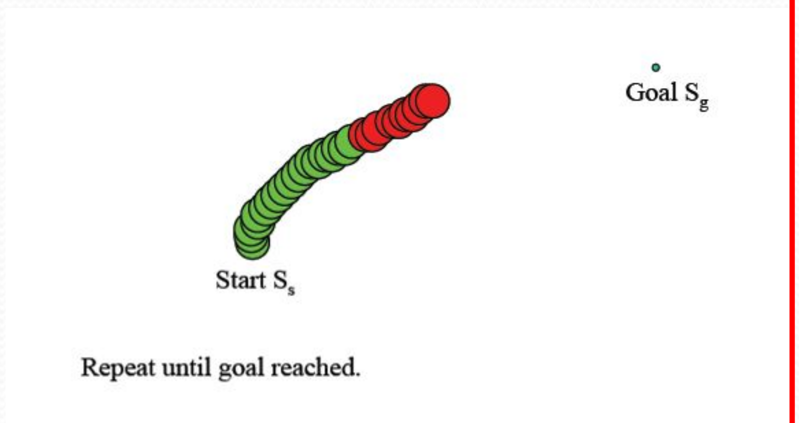


Brachistochrone curve

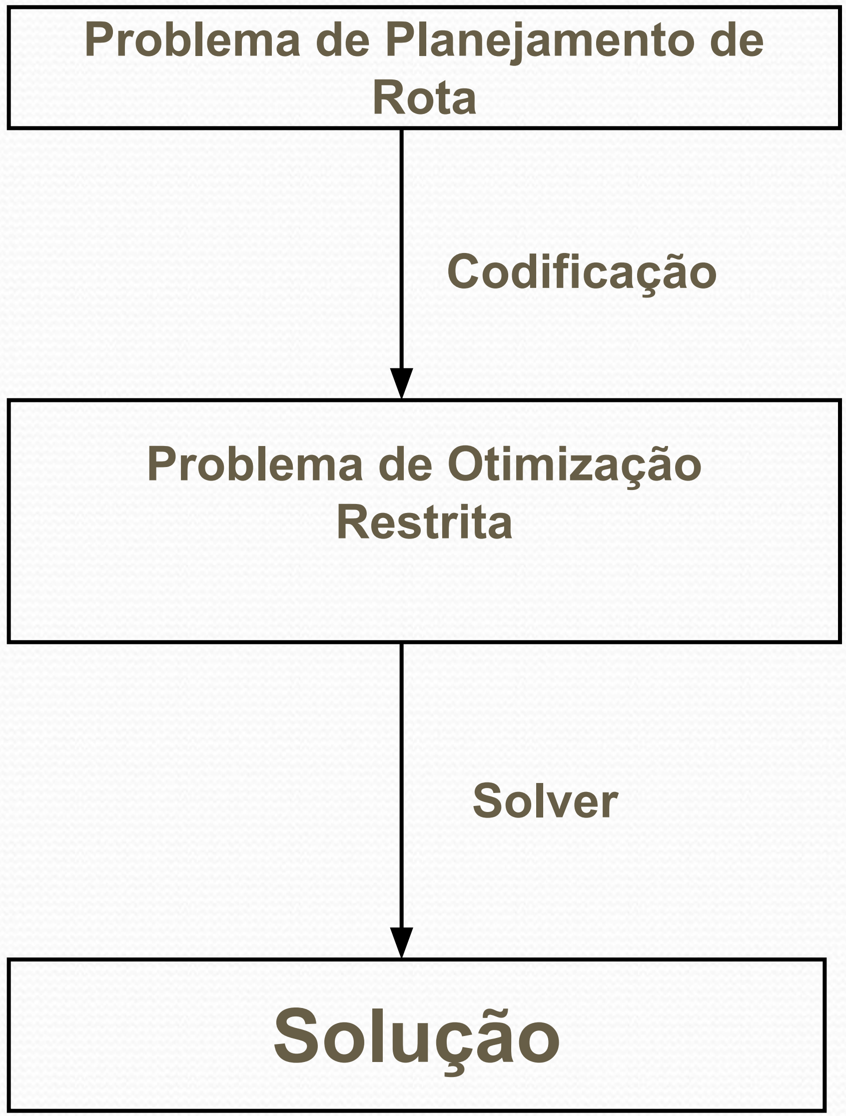
Rapidly-Exploring Random Tree (RRT)



Constrained Optimization



Abordagem para Planejamento de Rota



Abordagem para Planejamento de Rota

<u>Problema de Otimização</u>

- Otimização Convexa
  - Programação geométrica
  - Otimização Canônica
    - Programação Linear
    - Programação Quadrática
    - ...
  - Programação Não linear
- Otimização Não Convexa
  - Programação Inteira
  - Programação Inteira Mista
    - Programação Linear Inteira Mista
    - ....

Programação Linear

- Forma mais simples de otimização restrita.
- Aplicação em diversos problemas
  - Nutrição Animal
  - Operação de linhas aéreas
  - Planejamento de rotas
- Soluções obtidas em tempo polinomial
  - Algoritmo de Karmarkar (1984)
- Solver comercial disponível
  - ILOG CPLEX

Programação Linear Inteira Mista (PLIM)

- Formulação geral: praticamente todo problema pode ser aproximado e formulado como um MILP
- Tempo exponencial para resolver:
  - Branch and bound
  - Exponencial no número de variáveis inteiras
- Solver comercial disponível
  - ILOG CPLEX

Exemplo de Variáveis e Restrições de Dinâmica

- Veículo autônomo em um cenário bidimensional

Dinâmicas

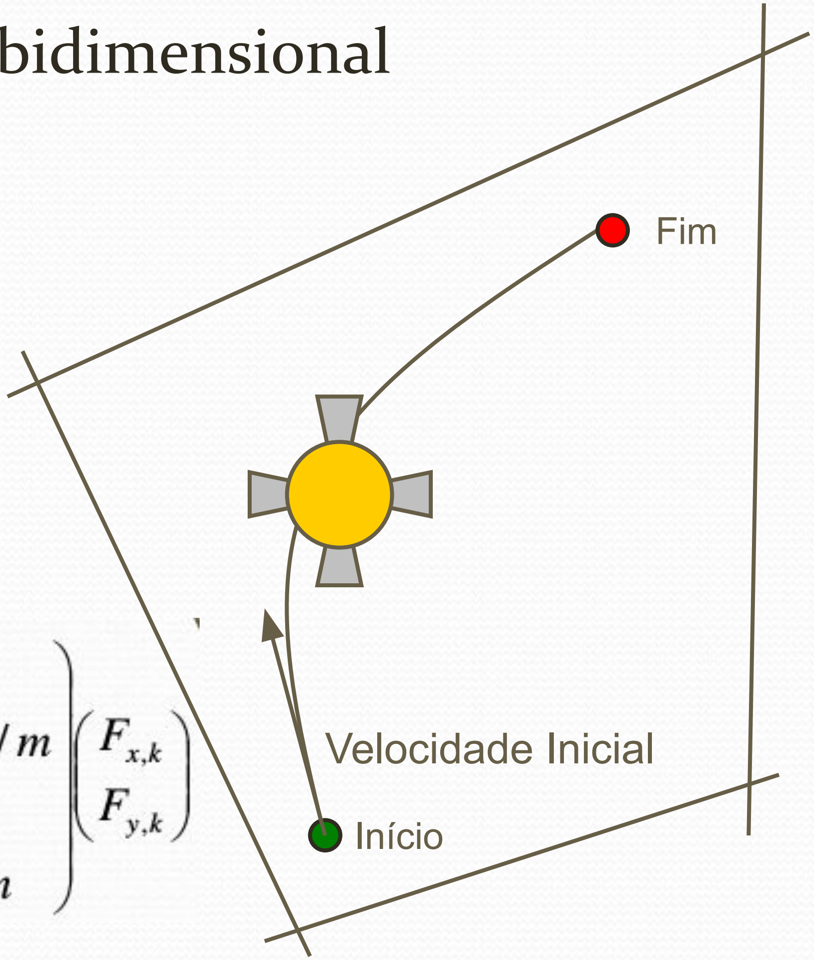
$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\end{pmatrix}$$

$$|F_x| \leq F_{\max}, |F_y| \leq F_{\max}$$

Dinâmica discreta no tempo

$$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\\ \dot{x}_{k+1}\\ \dot{y}_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \Delta t & 0\\ 0 & 1 & 0 & \Delta t\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\\ \dot{x}_k\\ \dot{y}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5\Delta t^2/m & 0\\ 0 & 0.5\Delta t^2/m\\ \Delta t/m & 0\\ 0 & \Delta t/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{x,k}\\ F_{y,k}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t}$$



Exemplo de Restrições Espaciais

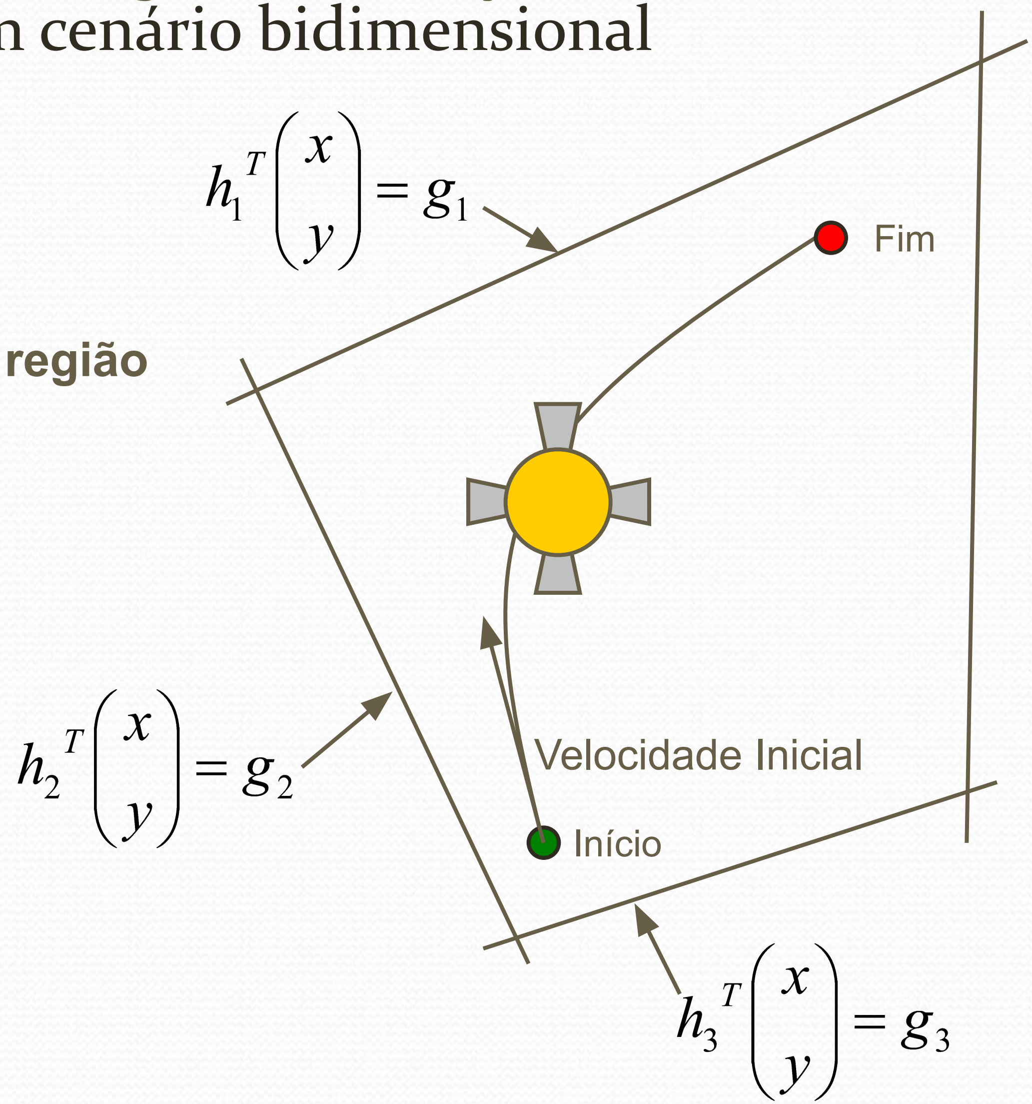
- Veículo autônomo em um cenário bidimensional

Restrições espaciais:
Veículo precisa estar dentro da região

$$\bigwedge_{n=1}^{4} h_n^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq g_n$$

or

$$\mathbf{Hx} \leq \mathbf{g}$$



Exemplo de Função de Custo

- Qual função de custo utilizar?
  - Exemplo: mínimo esforço no controle

$$C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{N-1}) = \sum_{k=1}^{N-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \mathbf{u}_k \right| = \sum_{k=1}^{N-1} \left| F_{x,k} \right| + \left| F_{y,k} \right|$$

  - Truques

$$\min |u| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\min u^+ + u^- \\ &u = u^+ - u^- \\ &u^+ \geq 0, u^- \geq 0, \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} &\min v \\ &v \geq u, v \geq -u, \end{aligned}$$

Formulação usando Programação Linear (LP)

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} \; C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N)$$ **Custo**

$$s.t.$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$ **Dinâmicas**

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\mathbf{k} \le \mathbf{g} \quad (k = 0,1,\cdots N)$$ **Restrições espaciais**

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$ **Posição inicial**

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$ **Posição final**

$$-\mathbf{u}_{\max} \le \mathbf{u}_k \le \mathbf{u}_{\max} \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$ **Limites de empuxo**

$$\mathbf{x}_k \equiv \begin{pmatrix} x_k & y_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k \end{pmatrix}^T, \;\; \mathbf{u}_k \equiv \begin{pmatrix} F_{x,k} & F_{y,k} \end{pmatrix}^T$$

Formulação usando Programação Linear (LP)

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N)$$

$$s.t.$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\mathbf{k} \le \mathbf{g} \quad (k = 0,1,\cdots N)$$

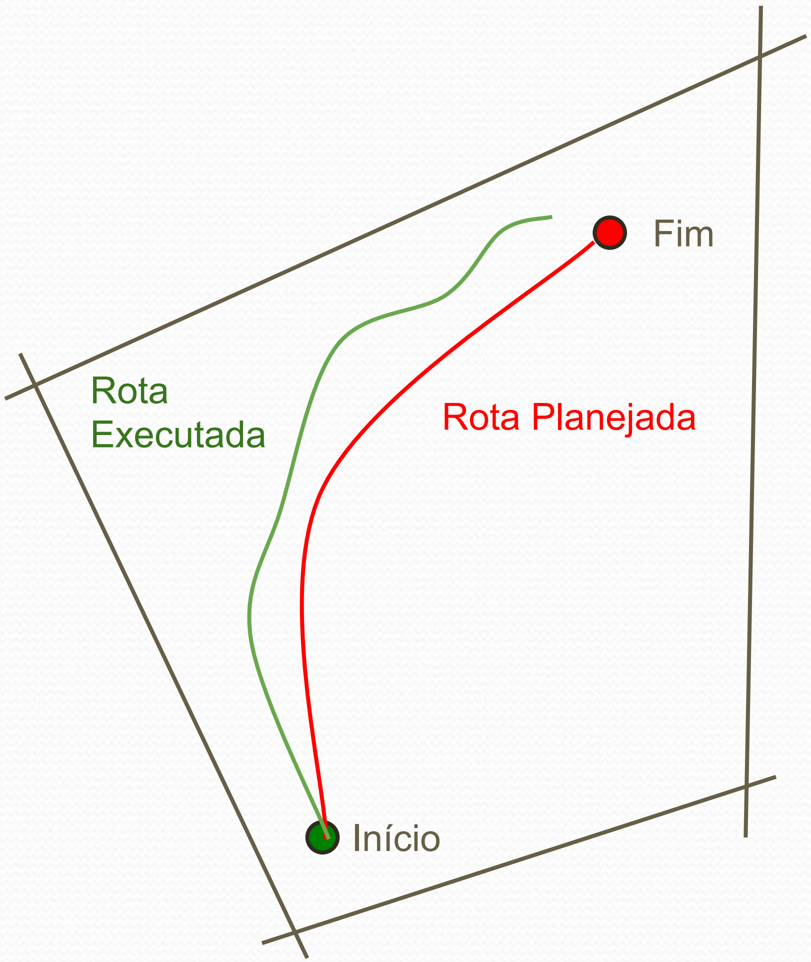
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

Não é uma boa ideia fixar N (horizonte de tempo)

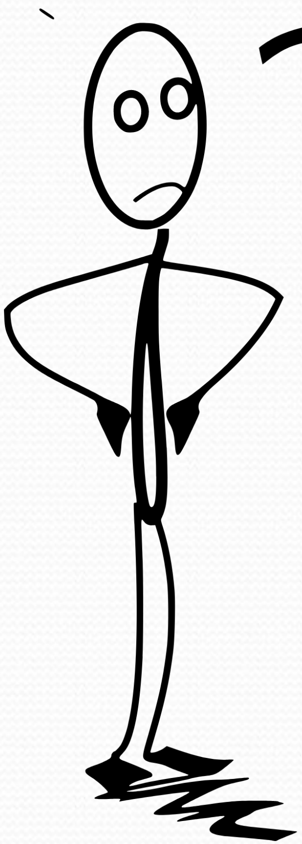
$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$

$$-\mathbf{u}_{\max} \le \mathbf{u}_k \le \mathbf{u}_{\max} \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

Formulação usando Programação Linear (LP)



Incerteza



Receding Horizon Control

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N) + f(\mathbf{x}_N)$$

Custo

Custo para chegar ao fim

$s.t.$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

Dinâmicas

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\mathbf{k} \leq \mathbf{g} \quad (k = 0,1,\cdots N)$$

Restrições espaciais

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

Posição inicial

$$\cancel{\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}}$$

Posição final

$$-\mathbf{u}_{\max} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

Limites de empuxo

$$\mathbf{x}_k \equiv (x_k \quad y_k \quad \dot{x}_k \quad \dot{y}_k)^T, \; \mathbf{u}_k \equiv (F_{x,k} \quad F_{y,k})^T$$

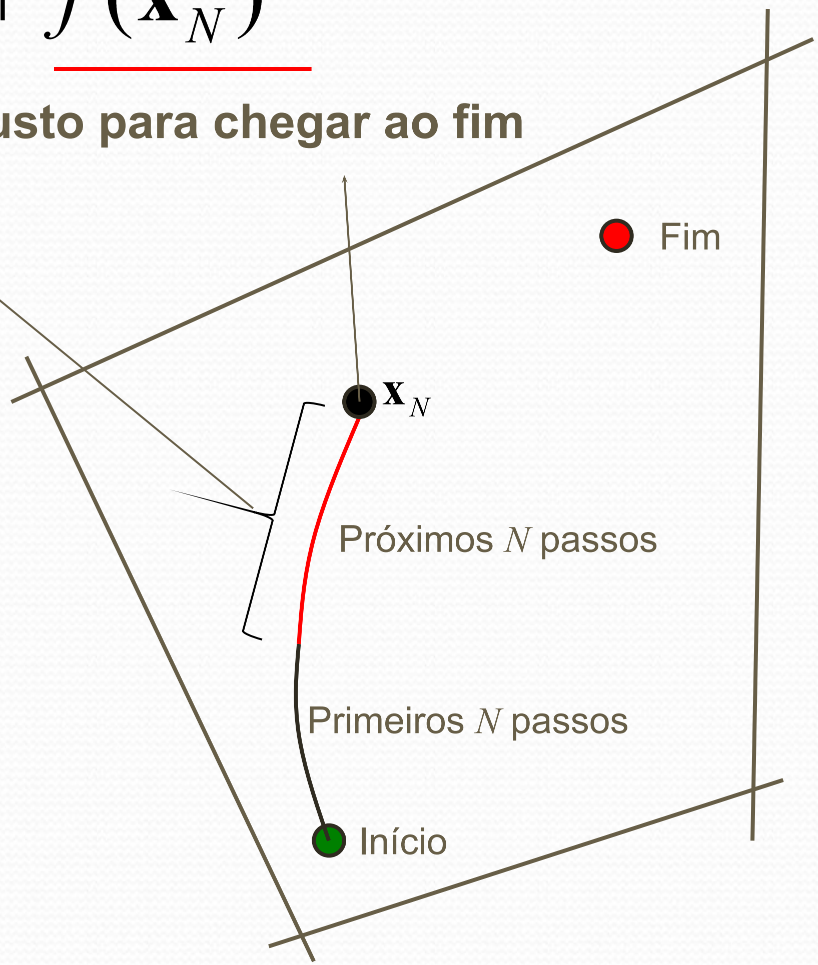
RHC - Custo para chegar ao fim

Estimativa do custo do estado final

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} \underline{J(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N)} + \underline{f(\mathbf{x}_N)}$$

Função de custo
= custo do segmento de rota atual

Custo para chegar ao fim



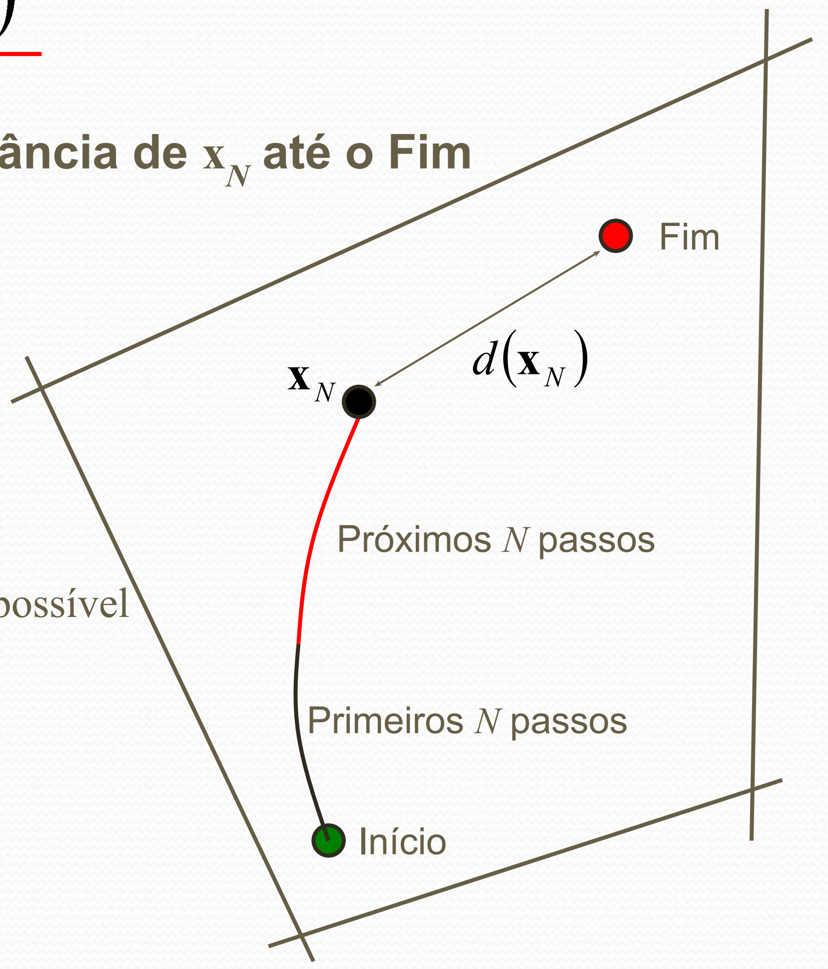
- Custo para chegar ao fim guia a rota até o fim.
- Similar a função heurística do algoritmos A*.

RHC - Custo para chegar ao fim

$$\min_{\mathbf{x}_{1:N},\mathbf{u}_{1:N}} \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T \left|\mathbf{u}_k\right|}_{\text{Esforço de controle ao longo da rota}} + c \cdot \underbrace{d\left(\mathbf{x}_N\right)}_{\text{Distância de } \mathbf{x}_N \text{ até o Fim}}$$

Distância de x_N até o Fim

Esforço de controle ao longo da rota



c: peso relativo entre esforço de controle e distância

c=0 : veículo não se move

c=+infinity : veículo se direciona ao Fim o mais rápido possível

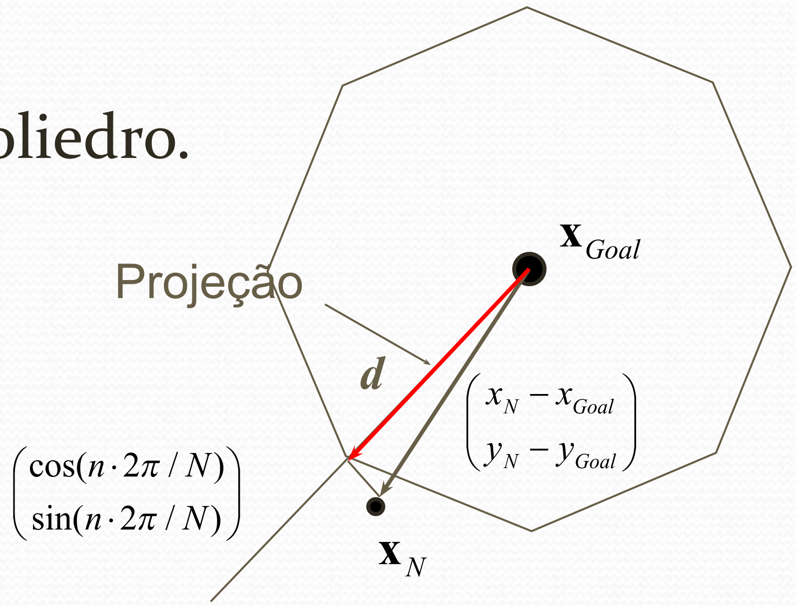
RHC - Aproximação do Cálculo da Distância

- Problema:

$$d(\mathbf{x}_N) = \sqrt{(x_N - x_{Goal})^2 + (y_N - y_{Goal})^2}$$

Não Linear!!!

- Truque.
  - Ideia: aproximar o círculo pelo poliedro.



$$\min \sqrt{(x_N - x_{Goal})^2 + (y_N - y_{Goal})^2}$$

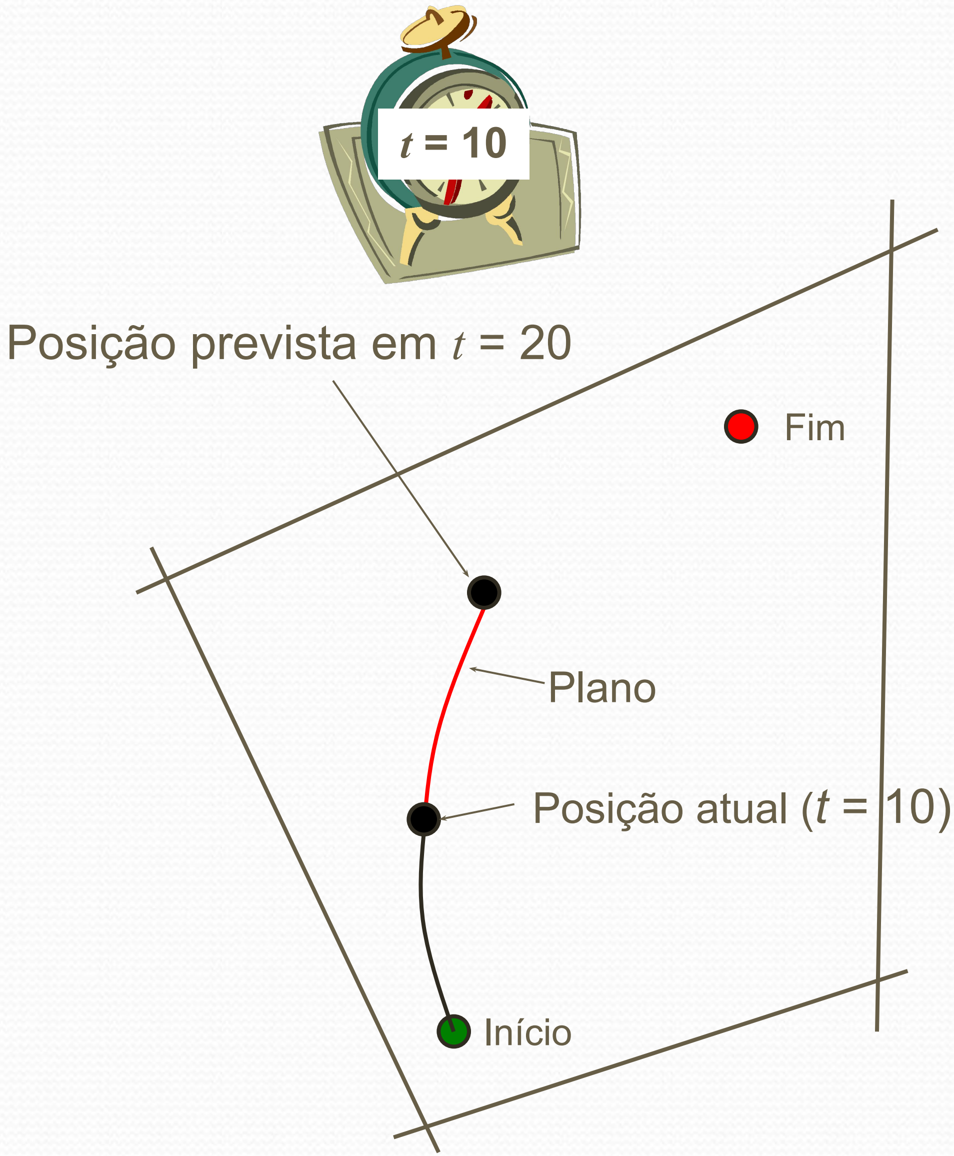
Aproximação

$$\min d$$

$$d \geq \begin{pmatrix} \cos(n \cdot 2\pi / N) \\ \sin(n \cdot 2\pi / N) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_N - x_{Goal} \\ y_N - y_{Goal} \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, \cdots N)$$

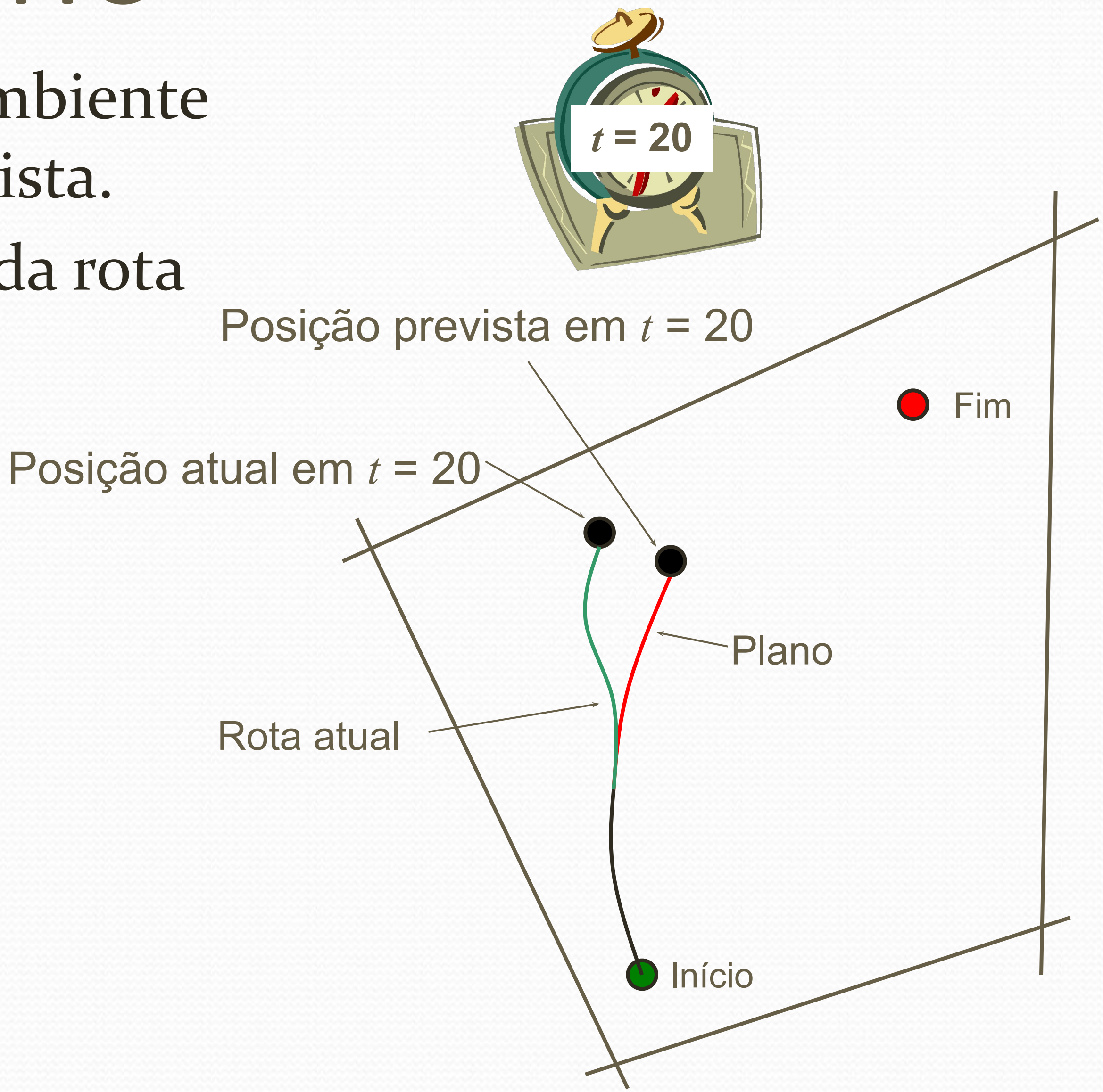
Exemplo RHC

- 10 segundos depois....

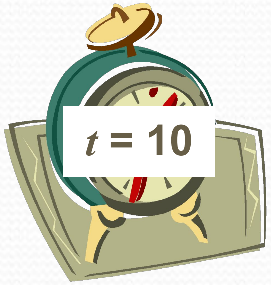


Exemplo RHC

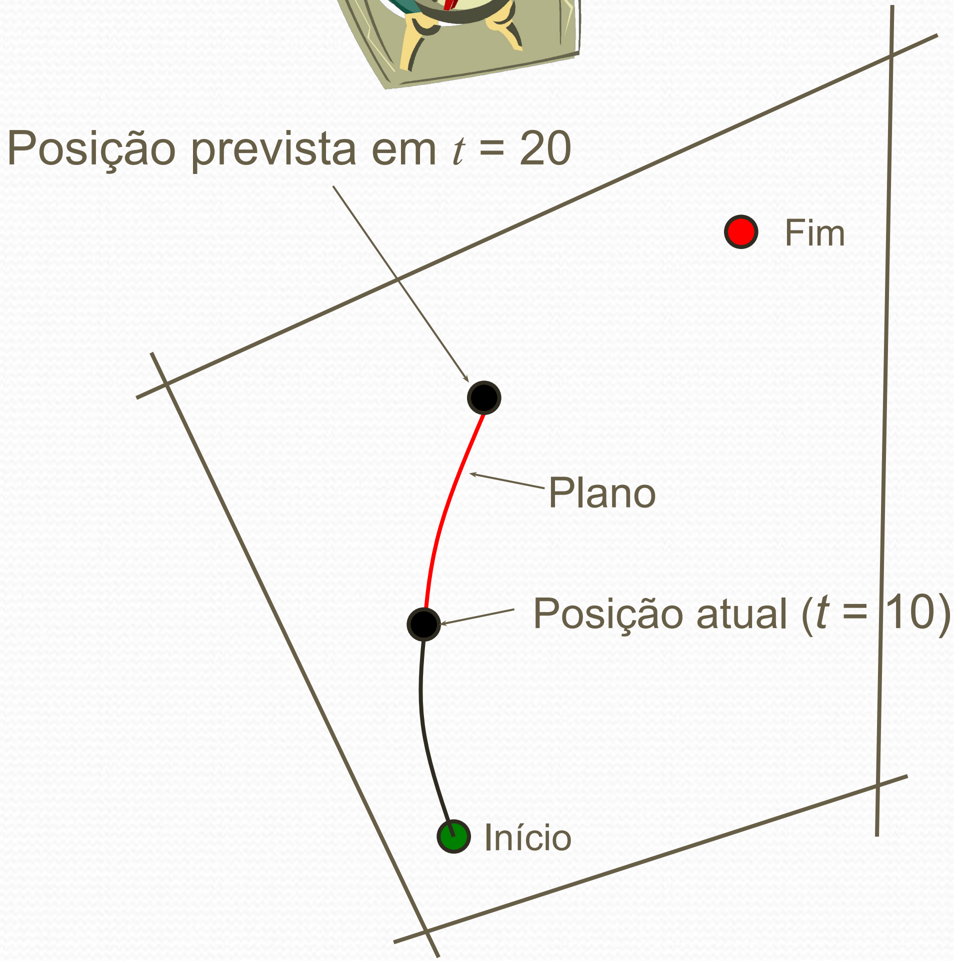
- As incertezas do ambiente alteram a rota prevista.
- A rota atual difere da rota planejada



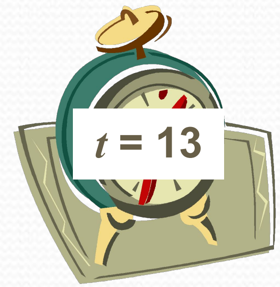
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução



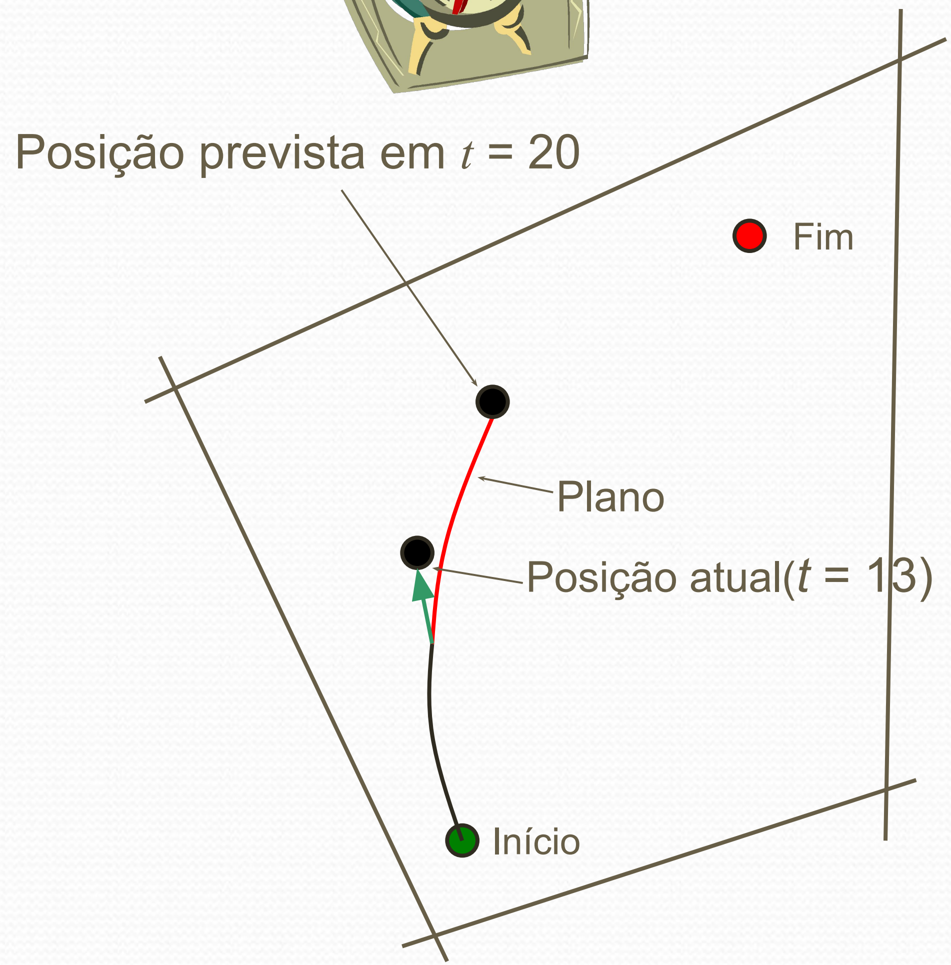
- 3 segundos mais tarde….



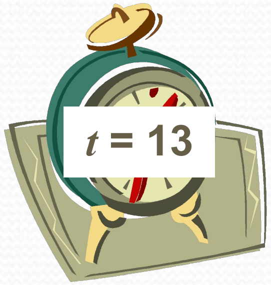
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução



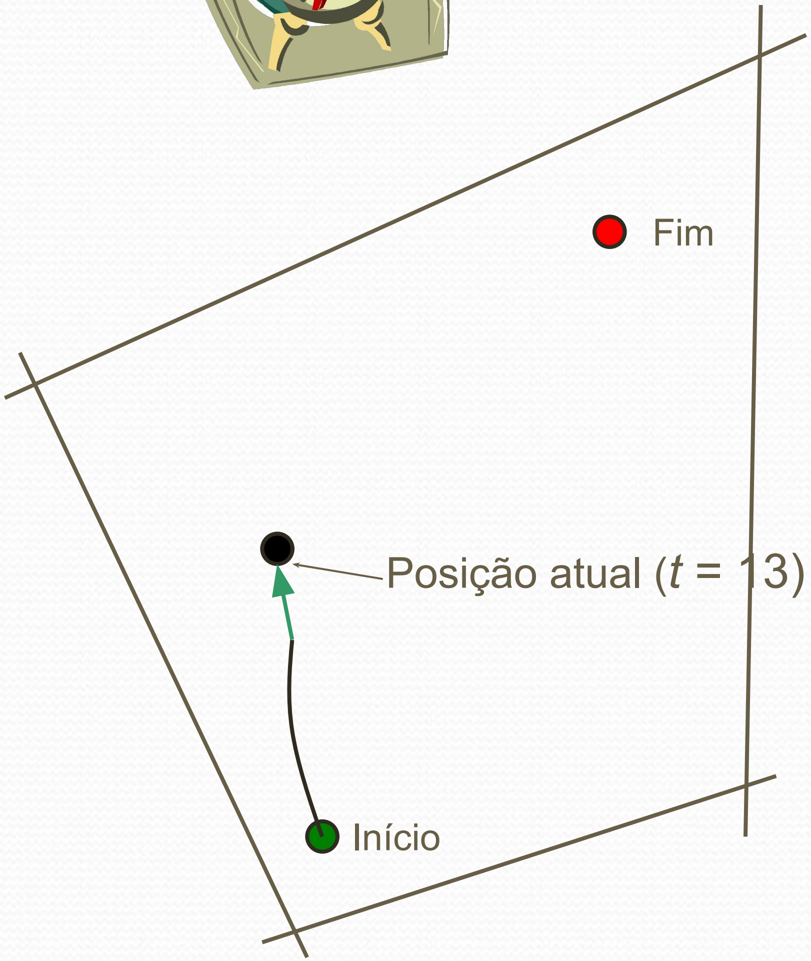
- 3 segundos mais tarde....
- Um pouco distante da rota planejada



Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

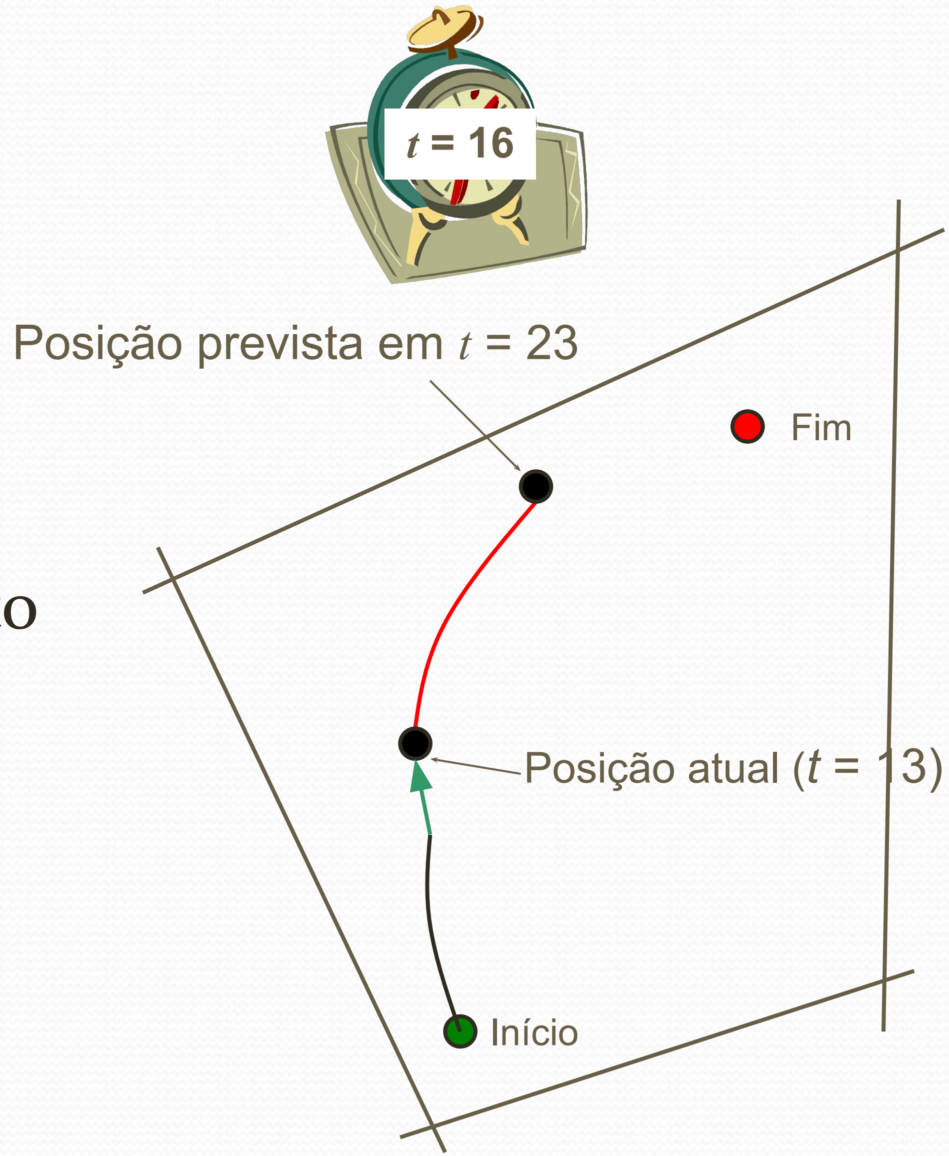


- Abandona o plano depois de t = 14



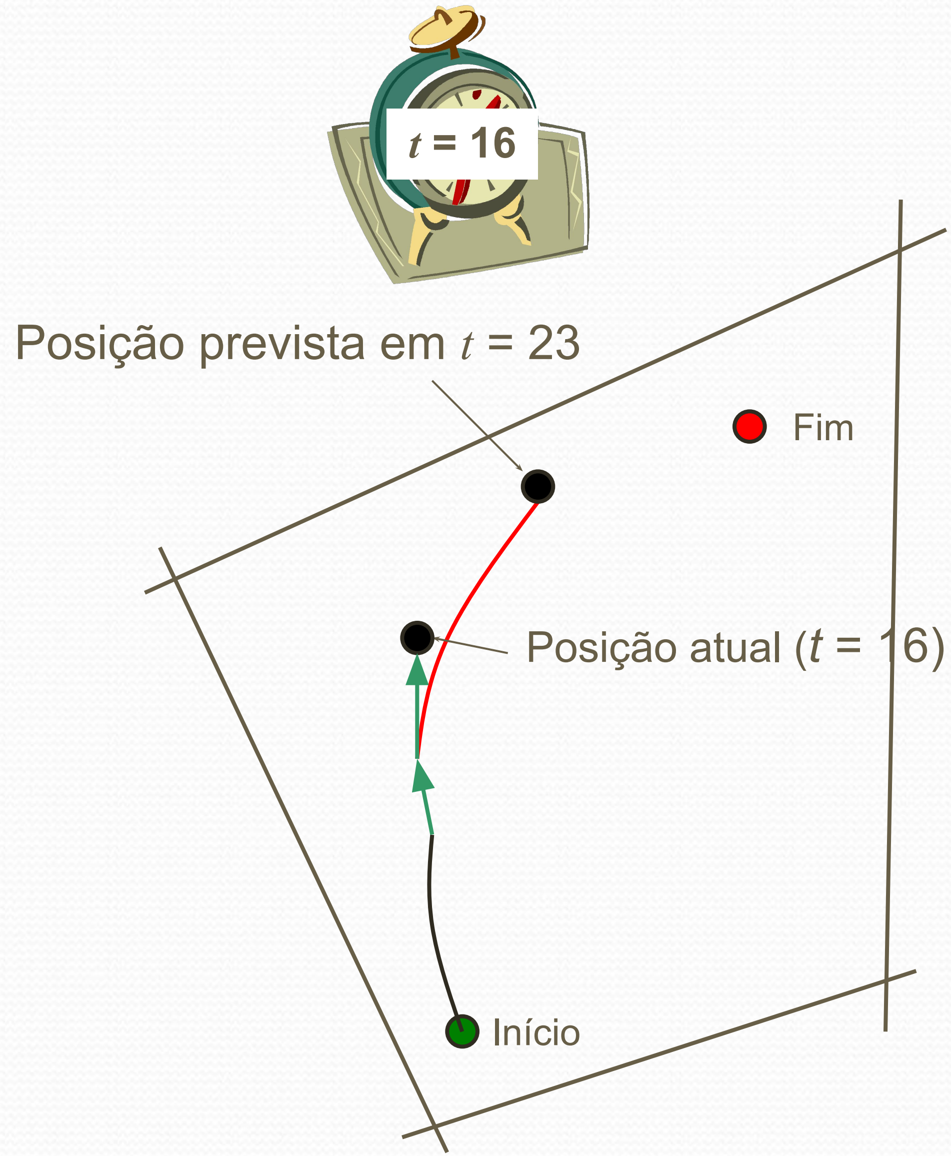
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

- Abandona o plano depois de t = 14
- Replaneja para outro horizonte de planejamento



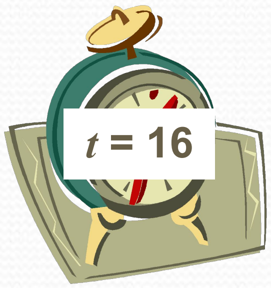
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

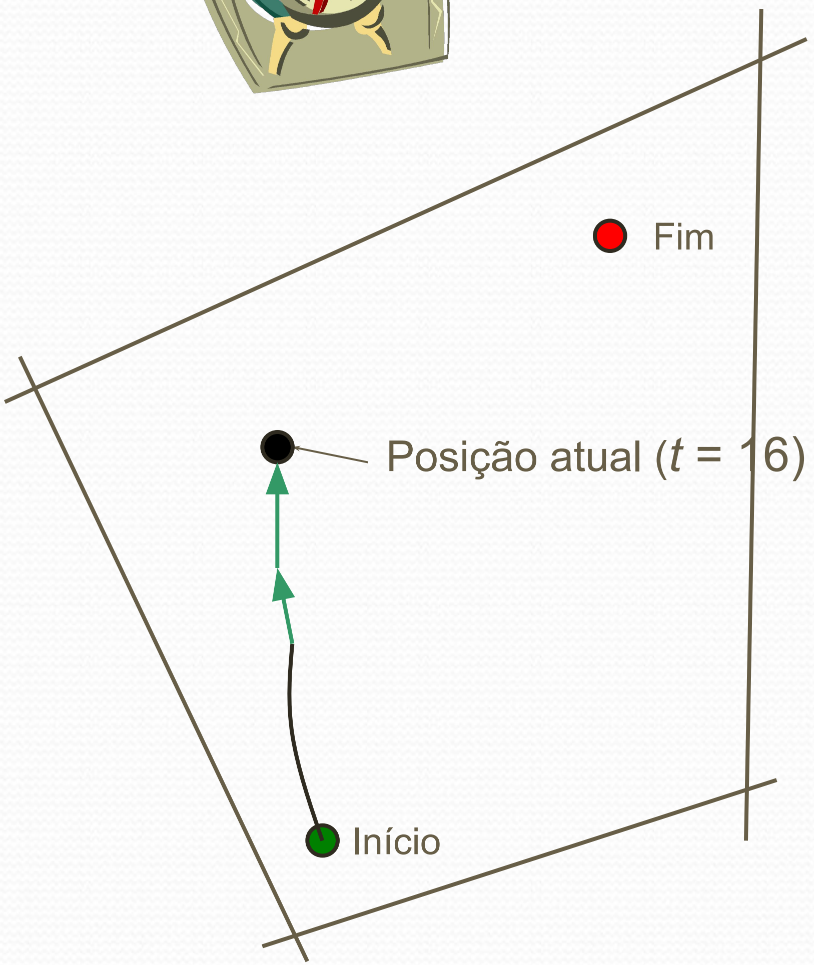
- 3 segundos mais tarde…



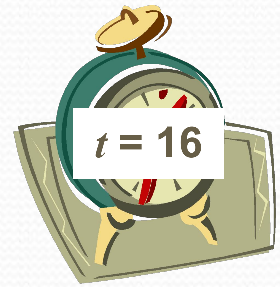
Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

- 3 segundos mais tarde...
- Abandona o plano após t = 17

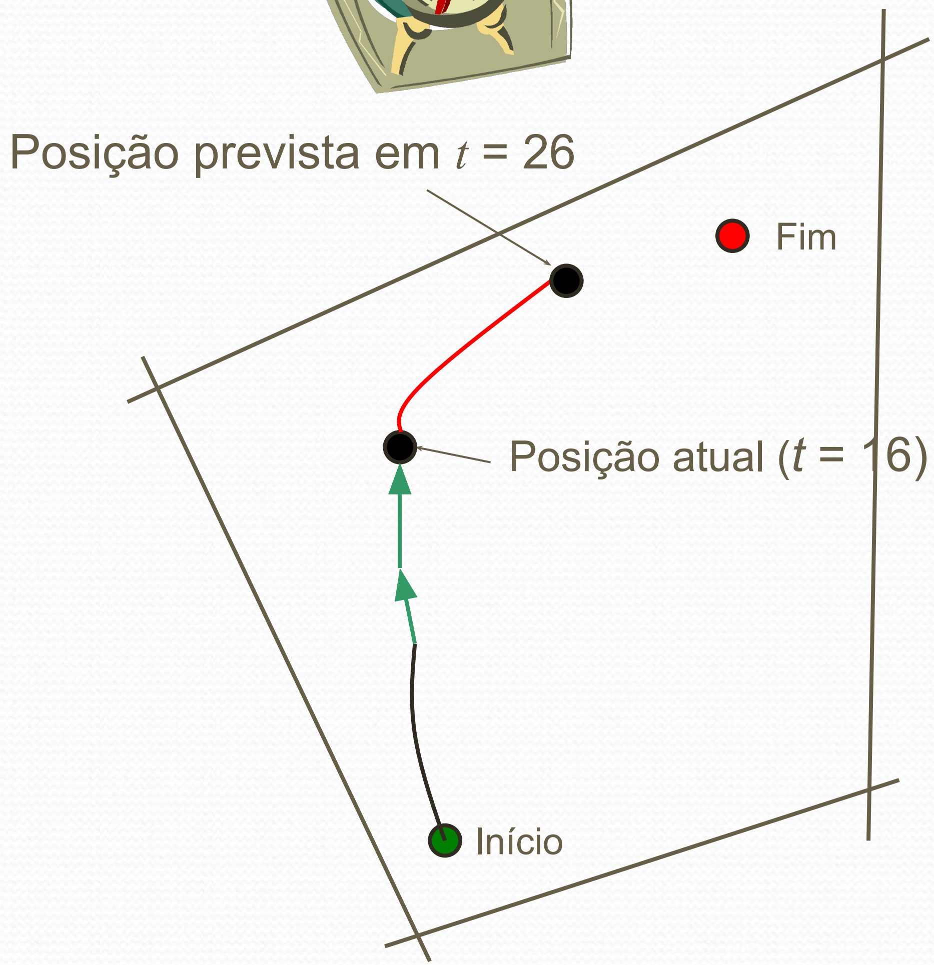




Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução



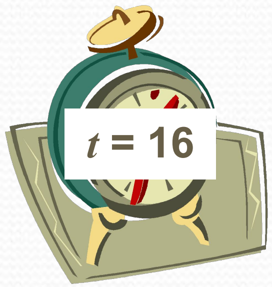
- 3 segundos mais tarde...
- Abandona o plano após t = 17
- Replaneja rota

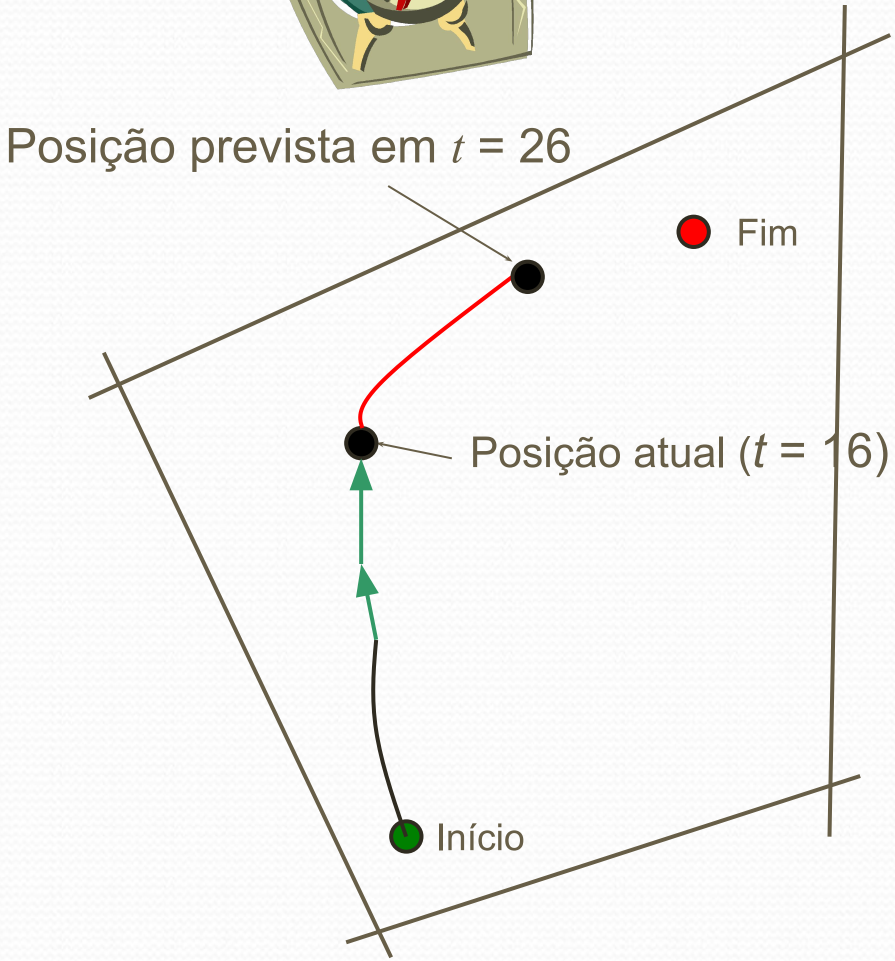


Horizonte de Planejamento > Horizonte de Execução

- Horizonte de planejamento: 10seg
- Horizonte de execução: 3seg
- (Horizonte de planejamento > horizonte de execução) para lidar com incertezas.

- Sempre, horizonte de execução = 1 passo





- Qual a necessidade de fazer um planejamento que nunca será executado??

- Resposta: Planejador usa a predição futura tal que o plano na próxima janela de tempo seja consistente com o plano em execução.

MPC = Model Predictive Control

(Constrained optimization + Receding horizon)

Desafio