

FÍSICA IV

ÓTICA

Até o final do Século XVIII, houve debate sobre a natureza da luz: partículas, como Newton propusera, ou ondas, a noção que Huygens defendera. Pouco depois da virada do Século XIX, entretanto, o cientista inglês Tomas Young descartou a primeira hipótese, por meio de uma observação experimental.

A figura 1 mostra esquematicamente o arranjo. A luz atravessa duas fendas para chegar à parede oposta. Quando a experiência é feita com duas fendas separadas por uma distância d na ordem milímetros, a projeção reproduz o formato das fendas, como indicado na figura.

A figura 2 mostra o que ocorre quando as fendas se aproximam, e a distância d se reduz a alguns micra. As imagens das duas fendas se dividem em numerosas outras. A região central, que é escura na configuração da figura, torna-se clara. As posições das demais manchas luminosas dependem da distância d e não guardam relação evidente com as projeções na figura 1.

As imagens na figura 1 são compatíveis com a interpretação de Newton, mas a mudança de padrão quando d diminui é inexplicável no modelo de partículas. A incongruência se torna especialmente evidente quando uma das fendas é bloqueada, na configuração da figura 2. Se a fenda da direita, por exemplo, for bloqueada, aparece na parede traseira uma imagem da fenda esquerda semelhante à imagem à esquerda na figura 1. Se a fenda esquerda for bloqueada, aparecerá a imagem da fenda direita.

Se começarmos com a fenda direita bloqueada, a imagem da fenda esquerda aparece na parede traseira. Se, nesse ponto, desbloquearmos a fenda direita, a região onde estava a imagem da fenda esquerda escurece para dar lugar ao padrão na figura 2. Se insistirmos no modelo de partículas, teremos de explicar por que elas são expulsas dessa região quando a fenda da direita é aberta.

Simulação

É muito mais fácil encontrar uma explicação no modelo ondulatório. O próprio Young demonstrou isso, com ajuda de um tanque de águas rasas. No tanque, ele simulou, analogicamente, a propagação da luz.

A figura 3 mostra uma simulação digital simples. As circunferências centradas no ponto D representam a luz emitida pela fenda D , num dado instante. As circunferências indicam os pontos onde o campo elétrico é máximo. A separação entre uma circunferência e as duas vizinhas é o comprimento de onda λ da luz. Da mesma maneira, as circunferências com centro em E representam a luz que passa pela fenda E , no mesmo instante.

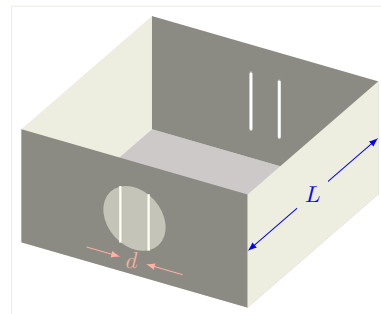


Figura 1: Representação ilustrativa da montagem de Young. A luz projetada na parede anterior da caixa atravessa as duas fendas e alcança a parede oposta. Se a distância d e a largura das fendas forem macroscópicas, uma imagem nítida será projetada, como ilustrado.

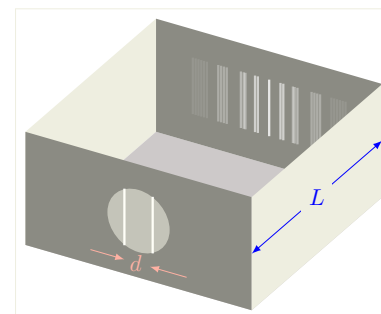


Figura 2: Arranjo experimental de Young para pequenas distâncias d , comparáveis com o comprimento de onda da luz. A interferência entre os raios que passam pela fenda da esquerda e os que passam pela da direita muda o padrão da projeção na parede traseira.

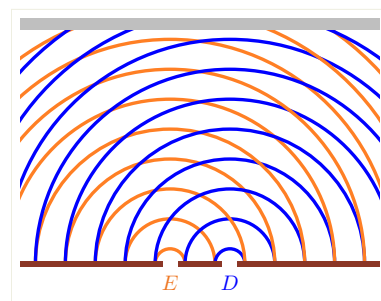


Figura 3: Simulação da experiência de Young. As circunferências laranja representam ondas nascidas na fenda E , e as azuis representam as geradas na fenda D .

Na direção vertical a partir do ponto médio entre as fendas, uma ilusão de ótica faz parecer que há um risco branco, que sobe até o anteparo no topo da figura. Há dois outros riscos brancos resultantes de ilusão: um a cerca de 30° da vertical, e o outro a cerca de -30° . Os três traços ilusórios marcam as direções em que as circunferências laranja interceptam as azuis.

As ilusões identificam, portanto, três retas, ao longo das quais os campos elétricos emitidos pelas duas fendas estão em fase. Ao longo delas, quando o campo das circunferências azuis é máximo, o das laranja também é máximo. Quando o campo das circunferências azuis é mínimo, o das laranja também é mínimo. Nos pontos onde essas retas encontram a parede onde as ondas são projetadas, o vetor de Poynting é máximo.

Entre eles, há retas onde o campo das circunferências azuis está sempre 180° fora de fase com os das laranja. Quando o campo devido à luz que vem de uma fenda é máximo, o devido à outra é mínimo. Os campos se cancelam. Na projeção sobre a parede, os pontos onde essas retas chegam ficam 100% no escuro.

Na parede de projeção, aparece, portanto, uma sequência que alterna pontos claros e escuros, em perfeita correspondência com o que se vê na figura 2. Dessa forma, Young demonstrou que o padrão de linhas claras e escuras resulta da interferência das ondas de luz — hoje, sabemos que são ondas eletromagnéticas — provenientes das duas fendas.

Se uma das fendas for bloqueada, a luz provirá apenas da outra, e a interferência desaparecerá. No modelo de partículas, é muito difícil explicar por que o padrão muda quando as duas fendas são abertas. Já no modelo de ondas, essa mudança é precisamente o que se espera.

Campo na parede de projeção

A figura 3 é bem convincente, mas podemos reforçar a argumentação de Young com um cálculo explícito. É relativamente simples.

Para começar, notamos que a dimensão vertical de cada fenda por onde a luz entra na caixa é muito maior do que a horizontal. Podemos adotar um modelo em que o comprimento vertical das fendas é infinito. Com isso, a simetria das ondas emitidas por cada fenda é cilíndrica.

O campo elétrico não pode mais ser descrito pelas ondas planas que estudamos ao discutir as equações de Maxwell. Não existe mais uma direção especial de propagação definida por um versor $\hat{k}$. Podemos ainda definir a grandeza

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1)$$

que, por extensão, ainda é chamada de *vetor de onda*, mas não podemos definir um vetor que indique a direção de propagação da onda como um todo.

Para visualizar k , podemos imaginar que existe um vetor de onda a cada ponto, como ilustrado pela figura 4. O vetor de onda tem direção radial e, por isso, muda a cada ponto da frente de onda. O módulo, entretanto, é sempre o mesmo: $k = 2\pi/\lambda$.

Na simetria *cilíndrica*,¹ o módulo do campo elétrico numa onda eletromagnética emitida por uma fonte na origem é, aproximadamente, dado pela expressão

$$E(\rho, t) = E_0 \frac{\cos(k\rho - \omega t)}{\sqrt{k\rho}}, \quad (2)$$

onde ρ é a distância a que o ponto em consideração está da origem, como indicado na figura 4.

1. Campo em simetria cilíndrica e conservação da energia

Não há espaço, aqui, para derivar a Eq. (2), mas podemos entender o denominador no lado direito com base numa análise da energia transportada pela onda. O fluxo de energia num ponto é proporcional ao valor médio do vetor de Poynting, que por sua vez é proporcional à média temporal de $E^2(\rho, t)$. Como o valor médio do quadrado do cosseno no lado direito da Eq. (2) é $1/2$, o fluxo médio de energia a uma distância ρ da fenda é proporcional a $E_0^2/(k\rho)$.

Essa proporcionalidade garante a conservação da energia, porque a energia irradiada é o fluxo do vetor de Poynting sobre uma superfície fechada que envolve a fenda. Se essa superfície for cilíndrica, com raio ρ , sua área $\mathcal{A}$ será proporcional a $\pi\rho$. Assim, o fluxo, que é igual ao o produto $\langle S \rangle \mathcal{A}$, do valor médio do vetor de Poynting pela área, será independente de ρ . Significa que a energia que flui por uma superfície a uma dada distância de fenda é a mesma energia que fluirá a qualquer outra distância. Em outras palavras, a energia se conserva.

De posse da Eq. (2), podemos calcular a soma dos campos que gerados pelas duas fendas na experiência de Young. A figura 5 mostra a geometria. Queremos calcular o campo no ponto P , sobre a parede de

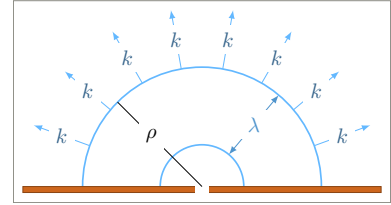


Figura 4: Onda cilíndrica gerada por uma fenda infinitamente longa. A placa laranja representa a parede onde ficam as fendas na experiência de Young, e o espaço vazio no centro é uma das fendas, perpendicular ao plano da figura. As semicircunferências azuis representam ondas, como na figura 3. Em cada ponto da semicircunferência, a onda avança na direção normal a ela. Como indicado pelas setas azuis, podemos definir um vetor de onda em cada ponto. A direção do vetor de onda muda de ponto para ponto.

¹ Quando a onda tem uma direção $\hat{k}$ bem definida, como vimos ao discutir as Equações de Maxwell, o módulo do campo elétrico tem a forma

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (S1)$$

Nesse caso, a energia por unidade de tempo que atravessa um plano perpendicular a $\vec{k}$ é igual à energia por unidade de tempo que atravessa os planos paralelos ao primeiro.

Já se a simetria for esférica, o módulo do campo elétrico terá a forma

$$E(r, t) = E_0 \frac{\cos(kr - \omega t)}{kr}, \quad (S2)$$

onde a distância r é medida a partir da fonte de luz. Nesse caso, a energia por unidade de tempo que atravessa uma superfície esférica centrada na fonte é igual à energia por unidade de tempo que atravessa qualquer outra superfície esférica centrada na fonte. Isso pode ser facilmente verificado: basta notar que o valor médio do vetor de Poynting é proporcional a $1/r^2$ e que a área das superfícies esféricas é proporcional a r^2 .

projecção. Da Eq. (2), podemos ver que

$$E(P, t) = E_0 \frac{\cos(ka - \omega t)}{\sqrt{ka}} + E_0 \frac{\cos(kb - \omega t)}{\sqrt{kb}}. \quad (3)$$

Como as fendas ficam muito próximas uma da outra, podemos aproximar a e b nos denominadores das frações no lado direito da Eq. (3) pela distância ρ (indicada na figura 5) entre o ponto P e o ponto médio entre as fendas. As distâncias a , b e ρ estão tipicamente na ordem de 10 cm, enquanto a separação entre as fendas está na ordem de 10 μm . Assim, as diferenças entre a , b e ρ são tipicamente dez mil vezes menores do que qualquer uma delas. É, portanto, boa aproximação substituir $\sqrt{ka}$ e $\sqrt{kb}$ por $\sqrt{k\rho}$.

As substituições $\cos(ka) \rightarrow \cos(k\rho)$ e $\cos(kb) \rightarrow \cos(k\rho)$ constituem, ao contrário, más aproximações. Uma vez que $k = 2\pi/\lambda$, os produtos ka e kb são números adimensionais na ordem de 100 mil. Digamos, por exemplo, que $ka = 100\,000 \text{ rad}$ e $kb = 100\,001 \text{ rad}$. Nessa hipótese, $\cos(ka) = -0.99936$, enquanto $\cos(kb) = -0.5700$. Embora ka e kb difiram por uma parte em cem mil, a diferença entre $\cos(ka)$ e $\cos(kb)$ é superior a 40% de $\cos(ka)$.

Isso acontece porque a função cosseno é periódica. Ela varia entre +1 e -1 a cada vez que seu argumento cresce de π , quer o argumento seja muito grande quer seja pequeno. Significa que devemos tratar os numeradores no lado direito da Eq. (3) com muito mais precisão do que os denominadores, ou seja, reescrever a igualdade na forma

$$E(P, t) = \frac{E_0}{\sqrt{k\rho}} (\cos(ka - \omega t) + \cos(kb - \omega t)). \quad (4)$$

Recorremos agora a uma das fórmulas da [prostaférese](#)² para simplificar o lado direito. Com ajuda da Eq. (P3), encontramos que

$$E(P, t) = 2 \frac{E_0}{\sqrt{k\rho}} \cos\left(k \frac{a+b}{2} - \omega t\right) \cos\left(k \frac{a-b}{2}\right). \quad (5)$$

O vetor de Poynting correspondente, $S = E^2/(\mu_0 c)$, assume a expressão

$$S(P, t) = 4 \frac{E_0^2}{k\rho} \cos^2\left(k \frac{a+b}{2} - \omega t\right) \cos^2\left(k \frac{a-b}{2}\right). \quad (6)$$

Um observador atento à iluminação do ponto P verá a média temporal do vetor de Poynting. Na média, a função trigonométrica que depende do tempo no lado direito da Eq. (6) vale 1/2. Assim, podemos ver que

$$\langle S(P) \rangle = 2 \frac{E_0^2}{k\rho} \cos^2\left(k \frac{a-b}{2}\right). \quad (7)$$

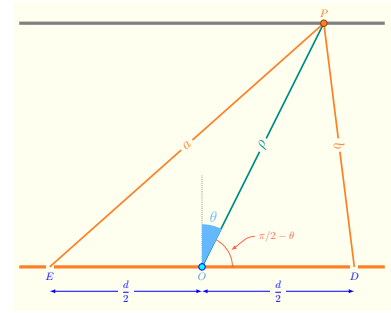


Figura 5: Distâncias e ângulo na experiência de Young. Por clareza, a distância d foi expandida no desenho. Na realidade, d é muito menor do que as outras distâncias na ilustração.

² As quatro expressões da prostaférese, que transformam somas e diferenças de funções trigonométricas em produtos, são

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \quad (P1)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right), \quad (P2)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (P3)$$

e

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right). \quad (P4)$$

Para seguir adiante, precisamos encontrar a diferença $a - b$. A distância a , entre a fenda E e o ponto P , é dada pela lei dos cossenos, aplicada ao triângulo EPO na figura 5. O ângulo oposto a a é $\pi - (\pi/2 - \theta) = \pi/2 + \theta$. Dado que $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta$, a lei dos cossenos assume a forma

$$a^2 = \rho^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\rho\frac{d}{2}\sin \theta, \quad (8)$$

ou seja,

$$a^2 = \rho^2 + \frac{d^2}{4} + \rho d \sin \theta. \quad (9)$$

Da mesma maneira, a lei dos cossenos aplicada ao triângulo PDO mostra que

$$b^2 = \rho^2 + \frac{d^2}{4} - \rho d \sin \theta. \quad (10)$$

Podemos agora subtrair as Eqs. (9) e (10), para ver que

$$a^2 - b^2 = 2\rho d \sin \theta. \quad (11)$$

O lado esquerdo pode ser fatorado em $(a - b)(a + b)$. A soma $a + b$ é aproximadamente igual 2ρ , pois $a \approx \rho$ e $b \approx \rho$. Com isso, a Eq. (11) se reduz a

$$a - b = d \sin \theta, \quad (12)$$

e a Eq. (7) assume a forma

$$\langle S(P) \rangle = 2 \frac{E_0^2}{k\rho} \cos^2(k \frac{d}{2} \sin \theta). \quad (13)$$

A Eq. (13) identifica os ângulos θ em que ocorrem as faixas luminosas na figura 2. A figura 6 mostra a alternância entre máximos e mínimos luminosos para duas razões d/λ . Há nítida distinção entre faixas claras e escuras no painel superior, $d = 5\lambda$.

No painel inferior, com $d = 10\lambda$, a rápida sucessão de picos e vales perto de $\theta = 0$ torna os máximos menos visíveis nessa região. Para d/λ crescente, o padrão de iluminação na parede de projeção evolui em direção ao que é representado na figura 1.

Caminho ótico

Da álgebra na seção *Campo na parede de projeção*, podemos extrair alguns ensinamentos. Para encontrar o padrão de projeção, a função trigonométrica no numerador da Eq. (2) é muito mais importante do

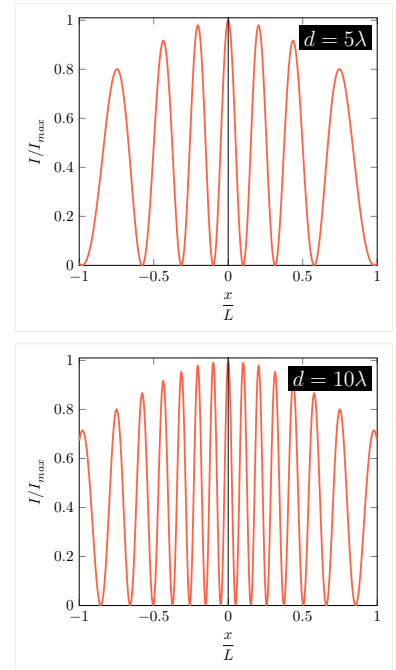


Figura 6: Intensidade da iluminação pela radiação proveniente das duas fendas na experiência de Young em função do ângulo θ na figura 5. No painel de cima, a distância entre as fendas é 5λ , e os máximos podem ser claramente identificados. No painel de baixo, com $d = 10\lambda$, a separação entre os máximos é bem menor, e as regiões claras e escuras projetadas na parede começam a se misturar.

que a raiz quadrada no denominador. A raiz quadrada é responsável pelo decaimento gradual da intensidade luminosa à medida que $|x/L|$ cresce nas abscissas dos dois gráficos na figura 6, enquanto a função cosseno responde pelas oscilações nas duas curvas.

Como, em geral, o decaimento gradual desperta pouco interesse, podemos adotar um procedimento mais simples para identificar os pontos onde há interferência construtiva ou destrutiva. Tomaremos a experiência de Young como exemplo inicial, mas o procedimento não está, de forma alguma, restrito à interferência de raios provenientes de duas fendas. Poderemos recorrer a eles sempre que as distâncias entre as fontes de luz e a tela de projeção forem todas muito maiores do que o comprimento de onda da radiação.

Definição do problema

Em linhas gerais, o problema que nos interessa envolve dois ou mais raios de luz que convergem para um mesmo ponto. Queremos saber se eles interferirão construtiva ou destrutivamente. Os raios devem provir de uma mesma fonte, mas nem sempre se pode acompanhá-los desde a origem até o ponto de convergência. Na experiência de Young, por exemplo, os raios provinham do Sol, mas o cientista centrou sua atenção no comportamento da luz entre as duas fendas e a tela.

De uma forma ou de outra, poderemos identificar um ou mais pontos de partida (as fendas, na figura 2) e um ponto de chegada (um ponto sobre a tela de projeção, na mesma figura). Se houver mais de um ponto de partida, as ondas devem estar fase nesses pontos iniciais. Para identificar a interferência no ponto de chegada, precisamos encontrar as fases dos raios que se encontram após seguir caminhos diferentes. Se eles estiverem em fase, a interferência será construtiva. Se estiverem fora de fase, haverá interferência destrutiva, que pode ser parcial ou totalmente destrutiva.

2. Pontos sobre uma mesma frente de onda são equivalentes

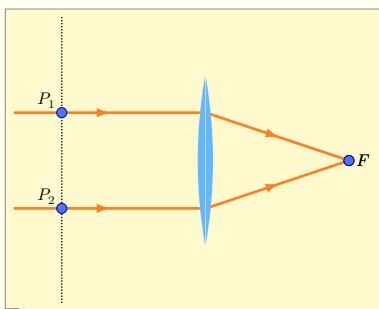


Figura 2.1

Quando dois raios de luz são paralelos, podemos visualizar frentes de ondas perpendiculares à direção de propagação, como indicado pela linha pontilhada na figura 1. Dois pontos que estejam sobre uma mesma frente de onda, como os pontos P_1 e P_2 na figura, têm a mesma fase. Para mostrar que eles são equivalentes, podemos posicionar uma lente convergente adiante. O tempo que a luz gasta para ir de P_1 ao ponto focal F é igual ao tempo que ela gasta para ir de P_2 a F . Assim, os campos elétricos em P_1 e P_2 interferirão construtivamente em F . Para discussão de interferência, portanto, tudo se passa como se P_1 e P_2 fossem um só ponto.

Para determinar a fase de um raio de luz no ponto de convergência, devemos determinar o tempo que ele leva para ir do ponto de partida ao ponto de chegada. A fase é o argumento da função trigonométrica que descreve o campo elétrico. Na Eq. (2), por exemplo, a fase é $k\rho - \omega t$. Uma vez que os raios que interferem têm a mesma fase no ponto de partida e estão na mesma posição na chegada, as diferenças de fase são determinadas pelos tempos de trânsito.

Para cada raio, portanto, devemos determinar o tempo de trânsito, isto é, o tempo necessário para o raio correr do ponto de partida ao de chegada. A figura 7 mostra, esquematicamente, o procedimento que determina o tempo Δt_{AB} .

Na ilustração, um raio de luz percorre o caminho representado pelos segmentos de reta. Parte do caminho é percorrido no ar, cujo índice de refração é, aproximadamente, unitário. No restante, a luz avança num meio com índice de refração n .

No ar, a velocidade da luz é, aproximadamente, c . Assim o tempo necessário para percorrer uma distância Δx é $\Delta x/c$. No meio com índice n , a velocidade é c/n , e o tempo para avançar Δx é $n\Delta x/c$. O tempo necessário para percorrer os três trechos na figura 7 é, portanto,

$$\Delta t_{AB} = \frac{d_1}{c} + n\frac{d_2}{c} + \frac{d_3}{c}. \quad (14)$$

Como os tempos são muito curtos, é mais prático multiplicar a Eq. (14) por c e definir o *comprimento do caminho ótico*

$$\Delta \ell_{AB} \equiv c\Delta t_{AB} = d_1 + nd_2 + d_3. \quad (15)$$

Para abreviar, é costume dizer “caminho ótico” em lugar de “comprimento do caminho ótico”.

Para comparar as fases de dois ou mais feixes de luz, devemos calcular o comprimento do caminho ótico de cada um e comparar os resultados. Se eles forem iguais, a interferência será construtiva. Se eles

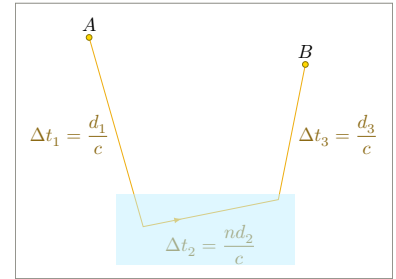


Figura 7: Cálculo do tempo necessário para um dado raio de luz correr de um ponto A a outro, B ao longo de um trajeto pré-definido. Na região branca, o índice de refração é unitário. Na região azul, o índice de refração é n .

forem distintos, a interferência ainda poderá ser construtiva, desde que os tempos de percurso difiram por números inteiros de períodos T da oscilação luminosa.

Alternativamente, podemos dizer que a interferência pode ser construtiva, desde que os caminhos óticos sejam iguais ou difiram por múltiplos inteiros de cT . E, uma vez que $T = 2\pi/\omega$, o produto cT é o mesmo que $2\pi/(\omega/c)$, ou seja $cT = 2\pi/k$. Aqui, k é o vetor de onda da luz no vácuo, onde a velocidade é c . Assim, $cT = \lambda$, onde λ é o comprimento de no vácuo. A interferência é construtiva quando os caminhos óticos diferem por números inteiros de comprimentos de onda no vácuo. Vejamos alguns exemplos.

Caminhos óticos na experiência de Young.

Começamos com a experiência de Young. Queremos encontrar os pontos sobre a parede de projeção onde a interferência será construtiva. Na seção *Campo na parede de projeção*, consideramos um ponto qualquer sobre a parede e somamos os campos devidos às radiações providas das duas fontes.

Aqui, adotaremos outra estratégia. Vamos focalizar nossa atenção sobre os pontos onde há interferência construtiva. Explicitamente, vamos considerar um ponto P onde a interferência é construtiva e determinar o ângulo θ entre a normal à parede e os raios de luz que partem das fendas e chegam em P . A figura 8 mostra a geometria.

Os pontos D e D' no painel de baixo da figura estão sobre uma mesma frente de onda e são, portanto, oticamente equivalentes. Para que haja interferência construtiva entre a luz que vai da fenda E até o ponto P e a luz que vai da fenda D até P , é necessário que a diferença entre os dois caminhos óticos seja um número inteiro de comprimentos de onda. Como D é equivalente a D' , e como a propagação é sempre no ar, a diferença entre os caminhos óticos é a distância de E até D' . No painel de baixo, podemos ver que essa distância é o cateto oposto ao ângulo θ no triângulo retângulo cuja hipotenusa é d .

Assim, para que a interferência seja construtiva, é necessário e suficiente que $\theta = \theta_m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), onde

$$d \sin \theta_m = m\lambda. \quad (16)$$

Recuperamos, assim, a conclusão que extraímos da Eq. (13). Como se vê, é muito mais fácil trabalhar com o conceito de caminho ótico do que somar campos elétricos.

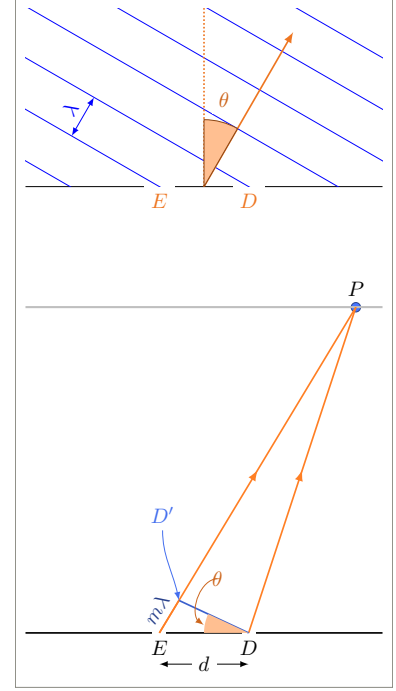


Figura 8: Caminhos óticos na experiência de Young. O painel superior mostra a região próxima à parede onde estão as duas fendas. As linhas azuis mostram frentes de onda planas perpendiculares à direção θ de propagação. Por hipótese, os campos emitidos na direção θ interferirão construtivamente na parede de projeção, num ponto P . A distância entre uma frente e a próxima é o comprimento de onda λ . O painel inferior mostra o ponto P . Para facilitar a visualização, a distância entre as paredes (que tipicamente é mais de dez mil vezes maior do que a separação entre as fendas) foi comprimida. Diferente do que a ilustração sugere, na experiência os raios de luz EP e DP são quase paralelos.

Rede de difração

Como segundo exemplo, vamos considerar uma *rede de difração*. Esse dispositivo é constituído por uma superfície plana, tipicamente um quadrado com alguns centímetros de lado, sobre a qual são riscados traços paralelos separados por uma distância uniforme d , de alguns micrômetros. Os traços são *espelhados*,³ para refletir a luz que sobre eles incide.

A figura 9 mostra, esquematicamente, uma rede de difração (painel superior) e dois raios por ela *difratados*, isto é, refletidos em direções nas quais a interferência é construtiva. Para identificar essas direções, podemos seguir o procedimento da seção *Caminhos óticos na experiência de Young*. Cada traço é uma fonte de luz, assim como as fendas da experiência de Young.

Consideraremos aqui, apenas, a incidência normal. Se examinarmos dois traços vizinhos, teremos um problema análogo ao de Young, com a geometria da figura 8. As direções em que há interferência construtiva são novamente dadas pela Eq. (16). Vale para qualquer par de traços e, portanto, vale para o conjunto.

Há, entretanto, uma distinção entre uma rede de difração, com milhares de traços, e o par de fendas na experiência de Young. Na montagem de Young, como a figura 6 mostra, a intensidade oscila entre máximos e mínimos. As linhas claras projetadas por uma rede de difração são muito mais nítidas. Os máximos ficam nos ângulos θ_m , dados pela Eq. (16), mas a intensidade decai rapidamente para zero quando θ aumenta ou diminui a partir de um desses θ_m e somente volta a crescer quando θ é praticamente igual ao ângulo do próximo máximo.

Isso acontece porque a separação entre dois traços na rede de difração não é unicamente d . Dado um traço, os dois vizinhos estão à distância d , mas os próximos estão à distância $2d$; em seguida vêm traços a $3d$ de distância, e assim sucessivamente. Esses traços mais distantes geram campos que interferem destrutivamente para ângulos $\theta \neq \theta_m$. Mesmo que a diferença entre θ e o θ_m mais próximo seja pequena, a soma dos múltiplos campos produz interferência quase totalmente destrutiva.

Graças a essa propriedade, as redes de difração são muito convenientes para separar as componentes de um feixe luminoso que mistura vários comprimentos de onda. Há inúmeras aplicações. Por exemplo, a separação dos comprimentos de onda na luz que provém de uma estrela permite identificar os elementos químicos presentes na estrela. Graças a essa técnica, soube-se que havia hélio no Sol muito antes do

³ Alternativamente, a rede pode ser formada por fendas paralelas, na mesma geometria. Nesse caso, a luz tem de atravessar a rede, e

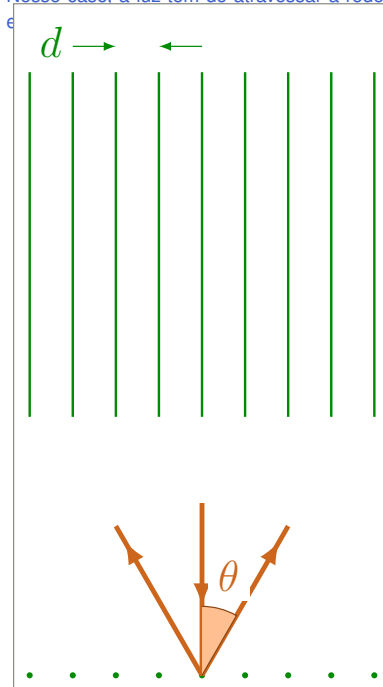


Figura 9: Rede de difração. O painel de cima é um desenho esquemático de uma rede. Os traços espelhados são dispostos paralelamente, a uma distância fixa d , algumas vezes maior do que o comprimento de onda da luz. O painel de baixo mostra um raio de luz que incide normalmente sobre a rede e é *difratado* numa direção que forma ângulo θ com a normal à rede. Cada ponto verde representa um dos traços no painel de cima, agora visto na direção longitudinal. Como na experiência de Young, a interferência pode ser construtiva em diversas direções.

elemento ser encontrado na Terra.

Lâminas transparentes

Nosso terceiro exemplo é a lâmina fina e transparente desenhada na figura 10. Um raio de luz alcança a lâmina no ponto de entrada E . O raio forma ângulo α com a normal à superfície. Parte dele é refletida de volta para o ar. O restante é refratado para dentro da lâmina e alcança o fundo da lâmina no ponto R . Nova reflexão parcial conduz a luz para o ponto de saída S . Em S , uma fração da luz é refletida de volta para dentro da lâmina, enquanto a fração restante é refratada para o ar.

A luz que é refletida para dentro da lâmina sofre novas reflexões e refrações. Não precisaremos analisar essa sequência, porque ela se repete, múltiplas vezes, a geometria da figura.

Os raios refletido em E e o raio refratado em S são paralelos. Queremos encontrar o ângulo α que resulta em interferência construtiva. Para isso, precisamos encontrar a fase do primeiro no ponto F e a do segundo no ponto S . Como F e S estão na mesma frente de onda, representada pela linha tracejada na figura, a diferença entre as duas fases nos dirá se há interferência construtiva.

O ponto de partida é E , onde os dois raios estão juntos. Queremos, portanto, encontrar o caminho ótico ℓ_{EF} , de E a F , e o caminho ótico ℓ_{ES} , entre E e S via reflexão em R .

Comprimento ℓ_{EF} . Entre E e F , a luz corre no ar. O comprimento do caminho ótico, portanto, é simplesmente a distância entre um ponto e o outro. Para encontrar a distância, aplicamos trigonometria ao triângulo retângulo EFS . Como mostra a figura, o segmento EF é o cateto adjacente ao ângulo $\pi/2 - \alpha$. Como a hipotenusa é $2d \tan \beta$, concluímos que

$$\ell_{EF} = 2d \tan \beta \sin \alpha. \quad (17)$$

A lei da refração, $\sin \alpha = n \sin \beta$ permite eliminar a variável α do lado direito:

$$\ell_{EF} = 2nd \tan \beta \sin \beta, \quad (18)$$

ou seja,

$$\ell_{EF}^* = 2nd \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}, \quad (19)$$

sem considerar a contribuição da reflexão para a fase da onda.

O * no lado esquerdo da Eq. (19) e a observação subsequente, em cor azul, são necessários porque o campo elétrico sofre inversão cada

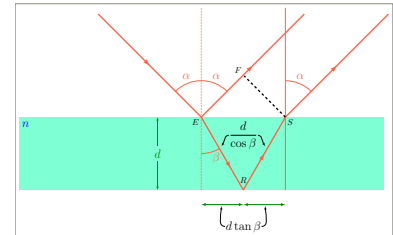


Figura 10: Lâmina transparente, com faces paralelas. O material da lâmina tem índice de refração n . A luz incidente forma ângulo α com a normal à superfície.

vez que a luz, em lugar de ser refratada para o meio com índice de refração n , é refletida de volta para o ar. Esse fenômeno é análogo à inversão que sofre um pulso que se propaga em uma corda quando alcança a parede onde a corda está presa.

Nas vibrações mecânicas, há inversão quando o pulso alcança um meio mais denso do que a corda em que se propaga. Com as eletromagnéticas, acontece uma mudança semelhante: o campo elétrico se inverte quando a onda é refletida por um meio menos denso. Assim, a reflexão no ponto R na figura 10 não provoca inversão de fase, enquanto a reflexão no ponto E força o campo a mudar de sinal.

Uma inversão de sinal é o que acontece com uma onda, num ponto fixo, quando decorre um intervalo de tempo $\Delta t = T/2$. A reflexão no ponto E , portanto, aumenta o caminho ótico de $c\Delta t = cT/2$. Como cT é um comprimento de onda no vácuo, a reflexão no ponto R incrementa o caminho ótico de $\lambda/2$. O preço de remover o * da Eq. (19) é, portanto, adicionar $\lambda/2$ ao lado direito:

$$\ell_{EF}^* = 2nd \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2}. \quad (20)$$

Comprimento ℓ_{ES} Entre E e S , a luz percorre o meio transparente. O caminho ótico ℓ_{ES} é, portanto, n vezes a distância percorrida, que é o dobro da distância entre o ponto de entrada E e o de reflexão R . A figura mostra que esta última distância é $d/\cos \beta$. Tudo considerado, encontramos

$$\ell_{ES} = 2n \frac{d}{\cos \beta}, \quad (21)$$

A diferença entre os caminhos óticos, portanto, é

$$\ell_{ES} - \ell_{EF} = (1 - \sin^2 \beta) \frac{2nd}{\cos \beta} - \frac{\lambda}{2}. \quad (22)$$

ou, após simplificarmos o lado direito,

$$\ell_{ES} - \ell_{EF} = 2nd \cos \beta - \frac{\lambda}{2}. \quad (23)$$

Para que a interferência seja construtiva, a diferença entre os caminhos deve ser um múltiplo inteiro de λ . No caso, os dois termos do lado direito são positivos. No primeiro termo, β é o ângulo de refração, que tem um limite superior dentro do primeiro quadrante: de acordo com a lei da refração, $\sin \beta$ tem de ser menor ou igual a $1/n$. Assim, $\cos \beta > 0$. Fisicamente, primeiro termo no lado direito é positivo porque a luz tem de andar mais e avança mais devagar dentro da lâmina do que fora dela. E o segundo termo, proporcional a λ , é claramente positivo.

Encontramos, portanto, a condição para interferência construtiva:

$$2nd \cos \beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (24)$$

Essa equação determina os ângulos β . De posse deles, é fácil aplicar a lei da refração para encontrar os ângulos de incidência α que provocam interferência construtiva.

Se, em lugar de ter a forma especificada pela Eq. (24), o produto $2nd \cos \beta$ for um múltiplo inteiro de λ , a interferência será totalmente destrutiva. Quando a lâmina é iluminada com luz branca, a interferência causa dispersão das cores, e a lâmina fica com aspecto furta-cor. Bolhas de sabão, filmes de óleo flutuando sobre a água e as asas de alguns insetos são exemplos.

A origem do princípio de Fermat

A proporcionalidade entre o (comprimento do) caminho ótico e o tempo necessário para a luz percorrer o trecho em questão sugere que o princípio de Fermat esteja, de alguma forma, associado com interferências. Estamos agora preparados para entender essa associação.

A figura 11 examina a situação mais simples: a propagação de um raio de luz, no vácuo, de um ponto A até outro B . Há uma infinidade de caminhos que a luz poderia seguir entre a origem e o destino. Alguns exemplos aparecem na figura. Como a propagação ocorre no espaço vazio, o caminho ótico associado a cada um desses caminhos é a distância de A até B ao longo desse percurso.

Considerados os percursos na figura na ordem descendente, podemos ver que o primeiro caminho ótico é maior que o segundo, que, por sua vez, é maior que o terceiro e assim sucessivamente, até o percurso horizontal. Daí para a frente, o caminho ótico volta a crescer, até o último.

Disso, podemos concluir que a interferência entre os raios de luz que seguissem os primeiros caminhos seria destrutiva, assim como a interferência entre os raios que seguissem os últimos. Entretanto, os caminhos óticos perto do percurso horizontal têm comprimento praticamente igual ao do percurso horizontal. Sabemos disso porque o caminho ótico é o mais curto. Em outras palavras, seu tamanho é mínimo e isso significa que os percursos vizinhos terão praticamente o mesmo tamanho.

Por isso, a interferência entre raios de luz que correm diretamente ou quase diretamente de A até B será construtiva. Caminhos que difiram da distância de A até B medida ao longo da linha reta por um número inteiro de comprimentos de onda também gerarão interferên-

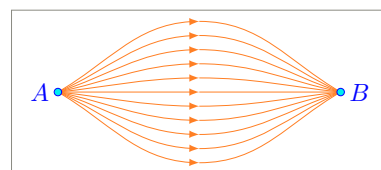


Figura 11: Alguns caminhos que a luz pode seguir para ir de um ponto A até outro B .

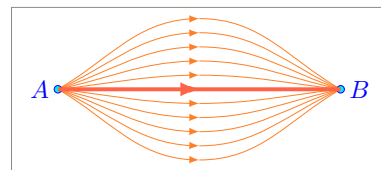


Figura 12: A interferência entre raios de luz que percorrem caminhos vizinhos é destrutiva, exceto para o segmento retilíneo $A - B$, que minimiza o caminho ótico.

cia construtiva. Se a distância entre A e B for muito maior do que λ , estes últimos caminhos se confundirão com a linha reta que une A até B , como mostra a figura 12. Um observador que acompanhe a trajetória luminosa nessas circunstâncias concluirá que a luz se propaga em linha reta.

Dessa discussão, poderíamos concluir que, nas condições em que vale a ótica geométrica (distâncias muito maiores do que o comprimento de onda) o que se observa é o percurso que minimiza o caminho ótico, ou seja, que minimiza o tempo de trânsito da luz. Chegaríamos, assim, ao enunciado do princípio de Fermat.

Essa conclusão é um pouco precipitada, porém, porque não precisamos exigir que o percurso minimizasse o caminho ótico. Basta que o comprimento do caminho ótico ao longo de um caminho seja aproximadamente igual ao comprimento dos caminhos óticos em percursos vizinhos. Para isso, o caminho ótico não precisa ser mínimo; basta que ele seja um extremo: mínimo, máximo ou ponto de inflexão. O enunciado mais preciso do princípio de Fermat é que, na ótica geométrica, a luz escolhe uma trajetória tal que o tempo de trânsito seja um extremo.

Nossa discussão dos espelhos esféricos (ou das lentes) fornece um exemplo ilustrativo. Para facilitar a discussão, vale a pena mostrar aqui a figura 13, que define as distâncias a , entre a fonte de luz e o ponto M , onde a radiação toca o espelho, e b , entre o ponto M e o ponto B , onde se forma a imagem.

Nossa discussão do espelho côncavo no capítulo sobre ótica geométrica mostrou que as distâncias a e b podem ser facilmente encontradas por triangulação. A lei dos cossenos mostra que

$$a^2 = R^2 + (p - R)^2 + 2(p - R)R \cos \theta, \quad (25)$$

onde p é a distância entre A e o espelho, e

$$b^2 = R^2 + (R - q)^2 - 2(R - q)R \cos \theta, \quad (26)$$

onde q é a distância entre B e o espelho.

A distância $a + b$ é o caminho ótico do percurso AMB . Vejamos como essa distância varia com o ângulo θ . Em outras palavras, para explorar o princípio de Fermat, vamos variar o parâmetro θ para variar a trajetória que a luz percorre. Queremos saber como o caminho ótico varia quando θ aumenta ou diminui.

Para tornar a discussão mais específica, vamos fixar a distância p e mostrar o caminho ótico em função do ângulo θ para vários valores de q .

A figura 14 mostra gráficos do caminho ótico entre A e B em função do ângulo θ para um espelho côncavo com raio $R = 2$ m. A fonte de

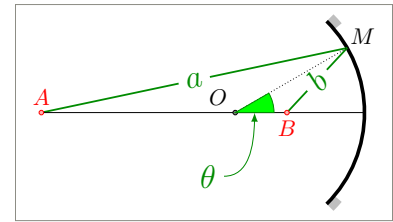


Figura 13: Distâncias percorrida pela luz para ir de uma fonte A sobre o eixo ótico de um espelho côncavo até o ponto B , onde se forma a imagem. O comprimento ótico da trajetória é parametrizado pelo ângulo θ entre o raio que vai do centro O do espelho até o ponto onde a luz é refletida.

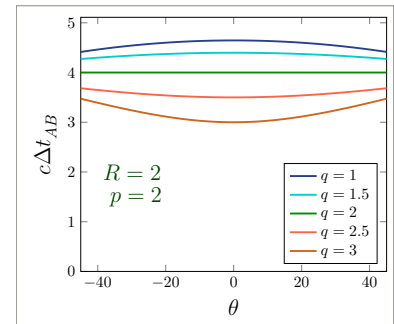


Figura 14: Caminho ótico para raio de luz que sai do ponto A na figura 13, é refletido pelo espelho no ponto M e incide sobre o eixo ótico do espelho no ponto B . A distância p , entre A e o ponto onde o eixo ótico cruza o espelho, é fixa. Cada curva mostra o caminho ótico em função de θ para a distância q indicada, onde q é a distância entre o ponto B e o espelho. Todas as distâncias são expressas em metros.

luz está à distância fixa $p = 2\text{ m}$ do espelho. Nessas condições, a fonte de luz está no centro O do espelho. A imagem se forma no mesmo ponto, com $q = 2\text{ m}$, portanto.

Cada gráfico na figura corresponde a um valor de q , entre $q = 1\text{ m}$ e $q = 3\text{ m}$. Em todos os casos, o comprimento ótico passa por um extremo em $\theta = 0$: por um máximo para $q = 1\text{ m}$ e $q = 1.5\text{ m}$ e um mínimo para $q = 2.5\text{ m}$ e $q = 3\text{ m}$. O extremo em $\theta = 0$ indica que a luz se dirige para o espelho ao longo do eixo ótico e é refletida ao longo do mesmo eixo. Essa é a solução trivial, que encontramos quando discutimos espelhos e lentes. É interessante notar que ela nem sempre minimiza o caminho ótico. Do ponto de vista físico, porém, a solução $\theta = 0$ desperta pouco interesse.

A curva mais importante na figura 14 é a verde. Com $q = 2\text{ m}$, o caminho ótico se torna independente de θ . Essa independência indica, segundo a versão mais precisa do princípio de Fermat, que nessa posição se forma uma imagem real.

Com o que sabemos agora, podemos ver que há interferência construtiva no ponto q . Todos os raios que saem de A e são refletidos no espelho levam o mesmo tempo para chegar ao ponto que está à distância $q = 2\text{ m}$ do espelho. A interferência entre todos eles é construtiva e dá origem à imagem real. O princípio de Fermat consegue identificar essa interferência porque ela acontece no domínio da ótica geométrica. Nem por isso, porém, a imagem real deixa de ser um belo exemplo de interferência construtiva.

Difração

A experiência de Young, como vimos na figura 2, combinou feixes de luz provenientes de duas fendas para exibir na tela oposta um padrão de que a ótica geométrica não podia explicar. Veremos agora que uma abertura só já é suficiente para mostrar efeitos de *difração*, isto é, raios de luz que se desviam da trajetória retilínea prevista pela ótica geométrica⁴. A difração aparece naturalmente, em certas situações. As estrelas parecem ter pontas porque a luz é difratada ao passar por nossas pupilas. Ao amanhecer ou no final da tarde, muitas vezes vemos o círculo laranja do Sol frequentemente, um círculo laranja, mas, quando ele está alto no céu, quem olha diretamente para o disco vê raias luminosas; essas raias são, também, raios difratados pela pupila. A luz de um ponteiro laser é difratada por partículas de poeira no ar, que fazem o feixe de luz faiscar no escuro.

Experimentalmente, a difração foi extensivamente estudada na primeira metade do século XIX, bem antes de Maxwell mostrar que a luz

⁴ É de se imaginar que Young conhecesse esses efeitos. Entretanto, ele percebeu que a experiência com duas fendas é mais convincente para mostrar que a luz é uma onda: como já vimos, a interferência entre dois raios reduz a intensidade da luz projetada em certos pontos da parede oposta, o que não tem explicação no modelo de partículas.

é uma onda eletromagnético. Já se sabia, claro, que se tratava de uma onda, e o trabalho de Young permitiu identificar o comprimento de onda. Isso permitiu complementar o trabalho experimental com desenvolvimentos teóricos. Neste último campo, os principais avanços da época se deveram a dois físicos: o alemão Joseph von Fraunhofer e o francês Augustin Jean Fresnel. Nossa discussão estará restrita à formulação de Fraunhofer, que descreve a luz longe da região que dá origem à difração.

A figura 15 esquematiza uma montagem experimental. Um feixe de raios luminosos paralelos incide sobre a parede frontal da caixa, passa pela abertura e ilumina a parede do fundo. Como ilustração, a figura mostra um furo redondo, mas a abertura pode ser retangular, hexagonal ou de qualquer outra forma geométrica.

Se o diâmetro da abertura na figura fosse grande, estaríamos no domínio da ótica geométrica, e uma figura nítida seria projetada na parede oposta. Essa figura luminosa seria uma imagem fiel da abertura.

No entanto, se o diâmetro for suficientemente pequeno — veremos mais adiante o que isso quer dizer, mais precisamente — aparecerá na parede uma sequência alternada de circunferências claras e escuras, como indicado na figura. Se a abertura não for circular, figuras de outras formas serão projetadas, mas ainda assim regiões claras se alternarão com outras escuras. O conjunto é chamado de *padrão de difração*.

Aproximação de Fraunhofer

Para descrever o padrão de difração, devemos calcular a intensidade da luz na parede projeção da caixa na figura 15. Para simplificar, vamos considerar incidência normal da luz sobre a abertura. Trabalharemos novamente com o princípio de Huygens. Em outras palavras, vamos tomar cada ponto na abertura iluminada como uma fonte de luz que se propaga no interior da caixa.

Quando distância L entre as paredes da caixa é grande e a abertura, pequena, é boa aproximação considerar uniforme o campo elétrico na abertura. Vamos chamar esse campo de E_0 . De cada ponto na abertura parte uma onda esférica.

Como explicado no quadro 1, da seção *Campo na parede de projeção*, o campo elétrico de uma onda esférica é proporcional a $\cos(kr - \omega t)/(kr)$, onde $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = kc$. Para calcular o campo num ponto P da parede de projeção, que pode ser o mostrado na figura 16.

A figura põe em evidência a contribuição de um ponto da abertura para o campo elétrico em P . Toma-se como referência um ponto no

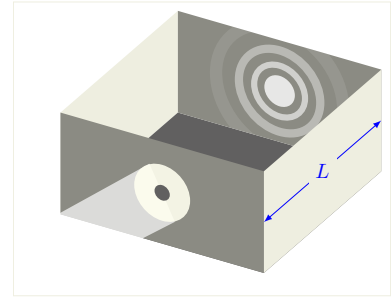


Figura 15: Experiência de difração. O padrão luminoso na parede do fundo depende da abertura iluminada na parede frontal.

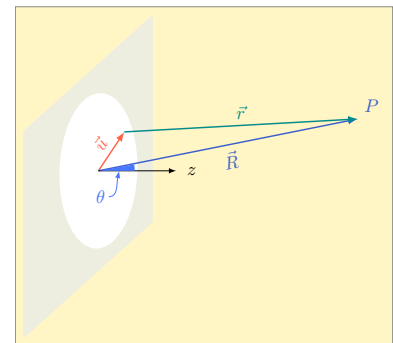


Figura 16: Cálculo do campo no ponto P , distante da abertura na parede frontal da caixa. O campo recebe uma contribuição de cada ponto na abertura. O vetor $\vec{u}$ indica a posição de um desses pontos. O vetor $\vec{R}$ é a posição do ponto P em relação ao centro da abertura, enquanto o vetor $\vec{r}$ é a diferença entre os dois: $\vec{r} = \vec{R} - \vec{u}$.

centro da abertura e adota-se um sistema cartesiano com eixos x e y no plano da parede frontal e eixo z dirigido para dentro da caixa. A posição do ponto que gera o campo é $\vec{u}$, e a do ponto P é $\vec{R}$. O vetor $\vec{r} = \vec{R} - \vec{u}$ define a distância r entre a fonte e o ponto P . O vetor $\vec{R}$ forma ângulo θ com o eixo z .

Com essas definições, o campo no ponto P assume a [forma](#)⁵

$$E(P) = \frac{E_0}{A} \cos \theta \int_A \frac{\cos(kr - \omega t)}{kr} d^2u. \quad (27)$$

O lado direito da Eq. (27) soma as contribuições dos elemento de área d^2u na abertura para o campo elétrico. Por isso, a integração cobre toda a área A da abertura, e o campo E_0 é dividido por A . O fator $\cos \theta$ foi introduzido por Fresnel com base numa observação experimental: a difração se concentra na região à frente da abertura e quase não se vê nenhum raio difratado em direções onde θ se aproxima de $(\pi/2)\text{rad}$.

Para efetuar a integral no lado direito da Eq. (27), precisamos relacionar r com o vetor $\vec{u}$. A figura 17 mostra o triângulo formado pelos vetores $\vec{r}$, $\vec{R}$ e $\vec{u}$. Chamamos de α o ângulo oposto ao lado $\vec{r}$.

A lei dos cossenos nos diz que

$$r^2 = R^2 + u^2 - 2Ru \cos \alpha. \quad (28)$$

Por hipótese, a distância R é muito grande em comparação com u . O segundo termo à direita na Eq. (28) é, portanto, muitíssimo pequeno em comparação com R^2 e pode ser desconsiderado. Com isso, a igualdade pode ser reescrita na forma

$$r^2 - R^2 = -2Ru \cos \alpha. \quad (29)$$

Em seguida, fatoramos o lado esquerdo, para mostrar que

$$(r - R)(r + R) = -2Ru \cos \alpha. \quad (30)$$

A figura 17 mostra, por outro lado, que $r \approx R$. É boa aproximação escrever $2R$ no lugar de $R + r$ no lado direito. Podemos então dividir os dois lados por $2R$, e resulta que

$$r = R - \hat{R} \cdot \vec{u}. \quad (31)$$

Aqui, recorremos à figura 17 para ver que $\hat{R} \cdot \vec{u} = u \cos \alpha$.

A Eq. (31) é a relação que queríamos, entre r e $\vec{u}$. Podemos empregá-la para simplificar a integral no lado direito da Eq. (27). No integrando, r aparece no numerador e no denominador. No denominador, é correto substituir r por R : da Eq. (31), podemos ver que o erro assim cometido é menor do que u/R , que é muito pequeno.

⁵ O campo elétrico é um vetor, mas no tempo de Fraunhofer e Fresnel apenas se sabia que a luz é uma onda. Por isso, para seguir notação compatível com o conhecimento da época, é melhor não especificar a direção do vetor campo elétrico na Eq. (27).

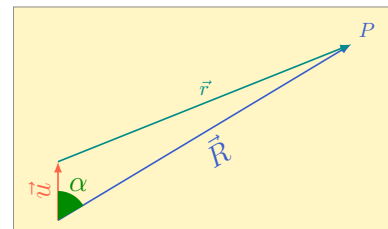


Figura 17: Triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{r}$ e $\vec{R}$, da figura 15.

No numerador, encontramos uma função trigonométrica. Já aprendemos, ao discutir interferência, que o argumento precisa ser tratado com mais precisão. Assim, substituímos todo o lado direito da Eq. (31) no lugar de r . Segue que

$$\cos(kr - \omega t) = \cos(kR - \omega t - k\hat{R} \cdot \vec{u}), \quad (32)$$

ou, após expansão do lado direito,

$$\cos(kr - \omega t) = \cos(kR - \omega t) \cos(k\hat{R} \cdot \vec{u}) + \sin(kR - \omega t) \sin(k\hat{R} \cdot \vec{u}). \quad (33)$$

O fator $\sin(k\hat{R} \cdot \vec{u})$ no segundo termo à direita na é uma função ímpar, que troca de sinal quando $\vec{u} \rightarrow -\vec{u}$. Para uma abertura [simétrica](#),⁶ como é o círculo na figura 15, a integral do segundo termo no lado direito da Eq. (33) é zero, e a igualdade se reduz à forma

$$E(P) = \frac{E_0}{A} \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \int_A \cos(\vec{k} \cdot \vec{u}) d^2u. \quad (34)$$

Aqui, para abreviar a expressão, definimos o vetor

$$\vec{k} = k\hat{R}, \quad (35)$$

isto é, um vetor que tem módulo $2\pi/\lambda$ e aponta na direção de R . É como se, em lugar de esférica, a onda fosse plana e tivesse vetor de onda $\vec{k}$.

A Eq. (34) é a expressão de Fraunhofer para o campo no ponto P . Dada uma abertura, precisamos apenas calcular a integral no lado direito para determinar o campo. Depois, basta quadrar o campo $E(P)$ para obter o vetor de Poynting e, a partir dele, encontrar a intensidade média da luminosidade no ponto em questão.

⁶ Se a abertura for assimétrica, é mais fácil lembrar que

$$\cos(kr - \omega t) = \text{Re} \left(\exp \left(i(kr - \omega t) \right) \right), \quad (P5)$$

substituir o cosseno no numerador do integrando na Eq. (27) pela parte real da exponencial, efetuar a integral sobre a exponencial e depois tomar a parte real.

3. Condições para validade da aproximação de Fraunhofer.

A Eq. (34) é aproximada. A principal fonte de desvio é a substituição de kr por $kR - \vec{k} \cdot \vec{u}$ na Eq. (32). Para avaliar o erro, podemos multiplicar os dois lados da Eq. (31) por k e visualizar o lado direito como uma expansão em série de Taylor de kr , até primeira ordem em ku . O erro absoluto é da ordem do termo de segunda ordem, $(ku)^2$, que não aparece na expansão. Para estimar o erro relativo, precisamos dividir $(ku)^2$ pelo termo de ordem zero, kR . Para garantir a validade da expressão

de Fraunhofer, precisamos exigir que

$$\frac{(ku)^2}{kR} \ll 1, \quad (36)$$

isto é, que

$$\frac{ku^2}{R} \ll 1, \quad (37)$$

para qualquer u .

Para ter segurança, devemos impor a desigualdade para o maior valor que u pode tomar. Na abertura circular da figura 15, u é limitado pelo raio do círculo. Para outras formas, estaremos garantidos se substituirmos u pelo diâmetro D da abertura, e R pelo comprimento L da caixa no lado esquerdo da Eq. (37). Lembrando que $k = 2\pi/\lambda$, chegamos dessa forma à condição de Fraunhofer

$$L \gg \frac{D^2}{\lambda}. \quad (38)$$

Em uma situação típica, L pode ser 10 cm. Para luz vermelha, com $\lambda = 700$ nm a condição que o diâmetro D deve satisfazer é

$$D \ll \sqrt{L\lambda} = 0.3 \text{ mm}. \quad (39)$$

Como vemos, a abertura precisa ser muito estreita para garantir a condição de Fraunhofer. Quando D não é tão pequeno assim ou quando a distância L é menor, de tal forma que L se torne comparável com D , a Eq. (34) se torna imprecisa. Nessa região, o padrão de difração passa a ser descrito pelo tratamento desenvolvido por Fresnel.

Essa abordagem é descrita no livro texto, mas não será discutida aqui. A aproximação de Fresnel leva em conta a não-uniformidade do campo elétrico na região da abertura. Para isso, divide a abertura em regiões concêntricas e calcula a contribuição de cada uma delas para o campo na tela de projeção.

Abertura retangular

Como exemplo concreto de difração, vamos considerar uma abertura retangular e empregar a expressão de Fraunhofer (34) para encontrar a luz projetada na parede oposta. Na geometria da figura 18, o retângulo tem lado $2a$ na direção horizontal e $2b$ na vertical. Convém adotar um sistema de coordenadas com origem no centro do retângulo, com eixo

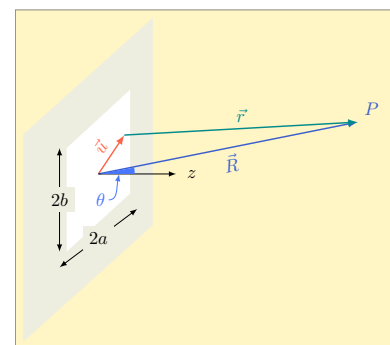


Figura 18: Difração por abertura retangular.

x horizontal, y vertical e z na direção normal ao plano da abertura.

Nesse sistema, o vetor $\hat{R}$ tem componentes x , y e z . Como consequência, o vetor $\vec{k}$ definido pela Eq. (35) tem componentes k_x , k_y e k_z . Já o vetor $\vec{u}$, que define a posição de um ponto na abertura, tem somente componentes x e y . Assim o produto escalar que aparece no argumento do integrando à direita na Eq. (34) é

$$\vec{k} \cdot \vec{u} = k_x u_x + k_y u_y. \quad (40)$$

Com isso, a Eq. (34) assume a forma

$$E(P) = \frac{E_0}{A} \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \cos(k_x u_x + k_y u_y) du_x du_y. \quad (41)$$

Para efetuar as integrais à direita, o mais simples é expandir o cosseno no integrando:

$$E(P) = \frac{E_0}{A} \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \cos(k_x u_x) \cos(k_y u_y) - \sin(k_x u_x) \sin(k_y u_y) du_x du_y. \quad (42)$$

A integração à direita na Eq. (42) é relativamente simples, porque a expansão que acabamos de efetuar transformou a integral dupla em uma soma de produtos de integrais simples. Além disso, cada integral sobre função seno é zero, porque a função seno é ímpar e os intervalos de integração são simétricos. A integral sobre x , por exemplo, vai de $-a$ a a , e resulta que $\int_{-a}^a \sin(k_x u_x) du_x = 0$. Sobram apenas as integrais dos cossenos:

$$E(P) = \frac{E_0}{A} \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \int_{-a}^a \cos(k_x u_x) du_x \int_{-b}^b \cos(k_y u_y) du_y. \quad (43)$$

As duas integrais no lado direito são facilmente efetuadas, e encontramos que

$$E(P) = 4 \frac{E_0}{A} \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \frac{\sin(k_x a)}{k_x} \frac{\sin(k_y b)}{k_y}. \quad (44)$$

Uma vez que a área da abertura é $A = 4ab$, o fator 4 à direita pode ser eliminado, e a Eq. (44) assume a forma

$$E(P) = E_0 \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \frac{\sin(k_y a)}{k_x a} \frac{\sin(k_y b)}{k_y b}. \quad (45)$$

Estamos interessados na radiação luminosa que é vista na parede de projeção. Devemos, portanto, calcular o valor médio do vetor de Poynting S , que é proporcional a $E^2(P)$:

$$S^2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \frac{\cos^2(kR - \omega t)}{k^2 R^2} \left(\frac{\sin(k_y a)}{k_x a} \frac{\sin(k_y b)}{k_y b} \right)^2. \quad (46)$$

A média temporal do fator $\cos^2(kR - \omega t)$ é $1/2$. A intensidade média da luz que alcança a parede de projeção pode, portanto, ser escrita na forma

$$I(P) = I_0 \frac{\cos^2 \theta}{k^2 R^2} \frac{\sin^2(k_y a)}{(k_x a)^2} \frac{\sin^2(k_y b)}{(k_y b)^2}. \quad (47)$$

onde $I_0 = E^2(0)/(2\mu_0 c)$ depende apenas da intensidade da luz incidente sobre a abertura.

A figura 19 mostra o perfil da luminosidade na reta horizontal diretamente oposta ao centro da abertura. A componente k_x do vetor $\vec{k}$ é proporcional à distância entre o ponto de observação e o ponto diretamente oposto ao centro da abertura. O gráfico mostra que há uma mancha luminosa na região central. À direita e à esquerda da mancha, há pontos escuros, em $k_x a = \pm\pi$. Em seguida, a intensidade volta a crescer, mas novos pontos escuros aparecem em $k_x a = \pm 2\pi$, e assim continua.

Na direção vertical, o comportamento é semelhante. Combinadas as duas direções, forma-se um padrão com um retângulo luminoso no centro e retângulos mais escuros em volta, como mostra o exemplo na figura 20.

A abertura correspondente, desenhada no painel inferior da figura, é mais larga do que alta. O padrão de difração, ao contrário, é constituído por retângulos luminosos mais altos do que largos.

Essa inversão é característica física da propagação ondulatória: quanto mais estreita for a abertura, maiores serão os ângulos de difração. Matematicamente, essa característica tem origem nos fatores $k_x a$ e $k_y b$ nos argumentos dos senos à direita na Eq. (47). Para um dado a , o primeiro zero no gráfico da figura 19 ocorre em $k_x = \pm\pi/a$; quanto maior for a , mais longe da origem estará esse primeiro zero, e mais largo será o pico central. Na figura 20, como $a > b$, a largura do retângulo central (proporcional a π/a) é maior do que a altura (proporcional a π/b).

Abertura circular

Para uma abertura circular, a geometria é a da figura 21 (que é uma cópia da figura 16). O sistema de coordenadas é posicionado no centro da abertura e tem, novamente, eixo z perpendicular ao plano da

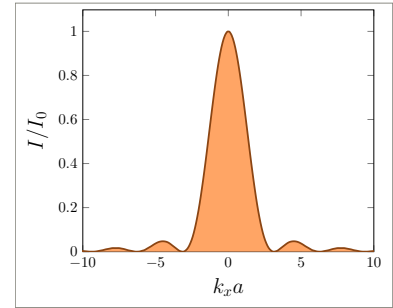


Figura 19: Intensidade da iluminação na parede de projeção na linha horizontal diretamente em frente à abertura.

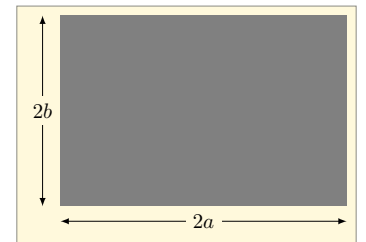
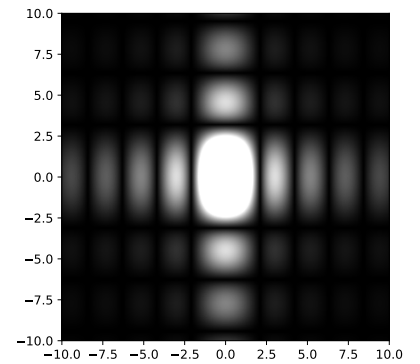


Figura 20: Painel superior: padrão de difração produzido pela abertura retangular no painel inferior. As dimensões da abertura são $2a = 0.15$ mm e $2b = 0.1$ mm.

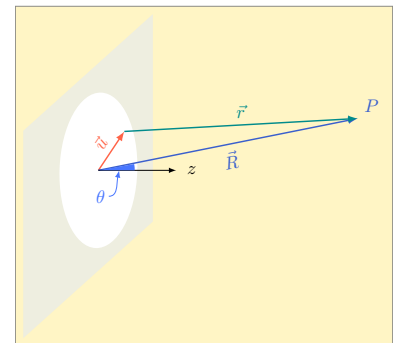


Figura 21: Difração por abertura circular

abertura. O eixo x é paralelo à projeção do vetor $\vec{R}$, e o eixo y , perpendicular a ela. Dado o ângulo θ entre o eixo z e o vetor $\vec{R}$, este último tem a forma

$$\vec{R} = R(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}). \quad (48)$$

Já o vetor $\vec{u}$, que vai da origem até um ponto qualquer na abertura, tem módulo u e forma ângulo φ com o eixo x . Aqui o módulo pode variar entre $u = 0$ e $u = \rho$, onde ρ é o raio da abertura, e o ângulo pode variar entre $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$. Podemos, portanto, escrever a expressão

$$\vec{u} = u \cos \varphi \hat{x} + u \sin \varphi \hat{y}. \quad (49)$$

Como na Eq. (35), definimos o vetor $\vec{k}$, com módulo $k = 2\pi/\lambda$ e direção paralela ao vetor $\vec{R}$, isto é,

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}). \quad (50)$$

Com isso, a Eq. (34) assume a forma

$$E(P) = \frac{E_0}{A} \cos \theta \frac{\cos(kR - \omega t)}{kR} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \cos(k_x u \cos \varphi) d\varphi u du, \quad (51)$$

onde $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta$ é a componente x do lado direito da Eq. (50).

A integral sobre o ângulo φ no lado direito da Eq. (51) define uma função especial: a função de Bessel de ordem zero. Quando esta última é integrada resulta a função de Bessel de primeira ordem. Sem escrever por extenso esses resultados, mostramos na figura 22 a intensidade luminosa em função de $k_x \rho$.

Como no padrão retangular da figura 20, podemos ver que o padrão se alarga em proporção inversa ao raio ρ da abertura. Isso acontece porque a intensidade luminosa na figura 22 depende apenas do produto $k_x \rho$. Assim, quanto menor for o raio ρ , maior deverá ser a componente horizontal da componente k_x do vetor $\vec{k}$, que por definição é proporcional à componente horizontal do vetor de observação $\vec{R}$.

Em outras palavras, quanto menor for o raio da abertura, maior será a componente horizontal de $\vec{R}$. Mais longe, portanto, aparecerão as circunferências escuras que envolvem a mancha luminosa central. Aberturas estreitas produzem efeitos de difração mais marcantes.

Se, ao contrário, a abertura for muito maior do que um comprimento de onda, o padrão na figura 22 se encolherá até que o círculo luminoso central tenha raio ρ e as circunferências escuras se acumulem na circunferência que define a borda do círculo. Nesse limite, o padrão luminoso projetado na parede oposta à abertura reproduzirá, precisamente, a geometria da abertura.

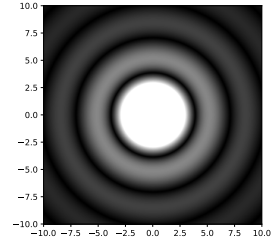


Figura 22: Padrão de difração produzido por uma abertura circular. Em função da distância radial, o padrão tem comportamento semelhante ao da função na figura 19.