Departamento de Física Aplicada
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

MECÂNICA (4310192) - 2020/2
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 5

7 de dezembro de 2020

Professor: Gustavo Paganini Canal
Monitor: Fábio Camilo de Souza

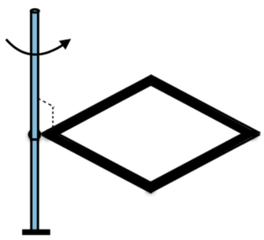
1. Para barras de massa m e comprimento d:
No caso a, o momento de inércia é calculado sob uma barra rotacionando em torno de sua extremidade somado ao de uma barra posicionada em paralelo ao eixo, a uma distância d: $(md^2/3)$ +(md^2).
No caso b, somente sob uma barra rotacionando em torno de sua extremidade: $(md^2/3)$.
No caso c, somente sob uma barra rotacionando em torno de seu centro: $(md^2/12)$.
No caso d, sob uma barra rotacionando em torno sua extremidade somada a uma barra a uma distância $d/2$: $(md^2/3)$+$(m(d/2)^2)$

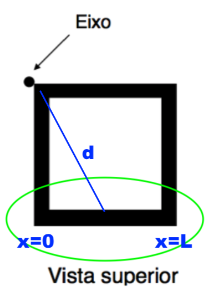
2. Os baldes giram com menor velocidade angular porque o momento angular do sistema baldes+barra+chuva é conservado, porém a energia mecânica não se conserva.

3. Cada uma das varetas mais próximas ao eixo de rotação apresentam momento de inércia no valor de: $\frac{ML^2}{3}$.
Para as varetas mais distantes, calculando a partir da definição $I = \int r^2 dm$, onde r é a distância do ponto e dm o diferencial de densidade, para a vareta de baixo no desenho de vista superior, com o eixo x da horizontal, a distância entre um ponto dessa da vareta até o eixo de rotação é dada por:

$$r^2 = L^2 + x^2$$

A vareta se encontra na região $0 < x < L$.





O momento de inércia para essa vareta é dado então por:

$$I_{baixo} = \int_0^L (L^2 + x^2)\frac{Mdx}{L}$$

$$I_{baixo} = \frac{M}{L}\left(L^3 + \frac{L^3}{3}\right)$$

$$I_{baixo} = \frac{4ML^2}{3}$$

Por simetria, a outra vareta mais distante também apresenta momento de inércia $\frac{4ML^2}{3}$.
O momento de inércia total é então encontrado como:

$$I_T = \frac{ML^2}{3} + \frac{ML^2}{3} + \frac{4ML^2}{3} + \frac{4ML^2}{3}$$

$$I_T = \frac{10ML^2}{3}$$

Como $M = m/4$,

$$I_T = \frac{5mL^2}{6}$$

4. A energia cinética translacional é dada por:

$$E_T = \frac{Mv^2}{2}$$

A energia cinética de rotação é dada por:

$$E_R = \frac{I\omega^2}{2}$$

Onde $I = \frac{MR^2}{2}$ é o momento de inércia do disco, e $\omega = \frac{v}{R}$ é a frequência de rotação do disco rolando sem deslizar, a energia de rotação pode ser reescrita como:

$$E_R = \frac{Mv^2}{4}$$

Portanto $E_R < E_T$.

5. A força resultante sempre será para direita (a atrito para a esquerda será sempre menor que a tração do fio), o movimento translacional será para direita.
A força de atrito não supera a força normal (caso $\mu = 1$), a tração do fio aplica torque na direção oposta ao da força de atrito, porém como o atrito aplica o torque a uma distância do eixo de rotação maior que a da tração, havendo atrito suficiente, o carretel rola para direita em sentido horário.

6. Não havendo forças externas, o momento angular é conservado.
Como parte da massa (os braços), se aproximaram do centro de rotação, o momento de inércia diminui. (aumentando a rotação)
Devido ao movimento dos braços, a energia mecânica aumenta.

7. O momento angular é dado por $\vec{L} = \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}$, sendo $\vec{\boldsymbol{r}}$ a distância do corpo ao ponto de observação e $\vec{\boldsymbol{v}}$ sua velocidade.
Para o ponto A, $\vec{\boldsymbol{r}} = r\hat{\boldsymbol{r}}$, para o ponto B, $\vec{\boldsymbol{r}} = l\sin\theta\hat{\boldsymbol{r}} - l\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}$. Sendo a velocidade a mesma para ambos, $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\boldsymbol{\theta}}$, note que $r = l\sin$.
Aplicando a definição, chegamos a:

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{A}} = Mr^2\omega\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{B}} = Mlr\omega\sin\alpha\hat{\boldsymbol{k}} + Mlr\omega\cos\alpha\hat{\boldsymbol{r}}$$

E as componentes perpendiculares ao eixo de rotação são iguais.

8. a) O momento de inércia é calculado a partir da definição $I = \int r^2 dm$, sendo integrado de uma ponta a outra ($r = -d/4$ para cima, até $r = 3d/4$ para baixo):

$$I = \int_{-d/4}^{3d/4} r^2 \frac{Mdr}{L}$$

Portanto:

$$I = \frac{7Md^2}{48}$$

b) A energia de rotação em torno de O é dada pela diferença na energia potencial, entre inclinação de ângulo 0 e θ. Sendo a energia potencial quando a barra está com angulo θ o nosso estado basal. A energia potencial inicial do sistema é dada pela diferença de altura

entre o centro de massa do corpo com inclinação θ, e a horizontal, que passa pelo ponto O. O centro de massa se encontra a uma distância $d/4$ do ponto de rotação O, portanto essa altura é dada por $h = \frac{d}{4}\sin\theta$.
A energia potencial inicial do sistema é então calculada:

$$E_{Pi} = Mg\frac{d}{4}\sin\theta$$

A energia de rotação, dada por $E_R = \frac{I\omega^2}{2}$ quando a vareta tem inclinação θ é então de igual a energia potencial inicial.

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mg\frac{d}{4}\sin\theta$$

Sendo ω no sentido anti horário, portanto:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sqrt{\frac{24g}{7d}\sin\theta}\hat{\boldsymbol{k}}$$

onde $\hat{\boldsymbol{k}}$ sai da folha.
O peso Mg, por sua vez, continua exercendo torque, agindo a uma distância $\frac{d}{4}\cos\theta$ (componente perpendicular a força peso), de valor $\tau = Mg\frac{d}{4}\cos\theta$, sendo que:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}$$

portanto

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{12g}{7d}\cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}$$

9. Logo antes da batida, o centro de massa se encontra a uma distância $l/3$ das partículas 2 e 3, sendo a uma distância $2l/3$ da partícula 1.
A velocidade do centro de massa é encontrado a partir da conservação do momento linear. Antes da colisão, temos apenas a partícula 3 se movendo, com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}$, portanto o momento é dado por $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}} = m\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}$.
Após a colisão, as três partículas se movem em conjunto, com velocidade do centro de massa $\vec{\boldsymbol{v}}$, portanto $\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{f}} = 3m\vec{\boldsymbol{v}}$.
Pela conservação do momento linear, então podemos afirmar que $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}}{3}$.

Definindo a direção de $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}$ o eixo x com $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} = v_0\hat{\boldsymbol{\imath}}$, a direção entre as partículas 2 e 1, a direção do eixo, y, sendo então que no momento da colisão, a partícula 3 está na posição $\vec{\boldsymbol{r}} = -\frac{l}{3}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. O momento angular, em relação ao centro de massa, antes da colisão, é dado por:

$$\vec{L_i} = \vec{r} \times m\vec{v_0}$$

$$\vec{L_i} = -\frac{l}{3}\hat{j} \times mv_0\hat{i}$$

$$\vec{L_i} = \frac{lmv_0}{3}\hat{k}$$

onde $\hat{k}$ sai da folha.
O momento de inércia do sistema de partículas 1,2,3, coladas, é dado por:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = M\left(\frac{l}{3}\right)^2 + M\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + M\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{2Ml^2}{3}$$

O momento angular final é dado por:

$$\vec{L_f} = I\vec{\omega}$$

A partir da conservação do momento angular $\vec{L_i} = \vec{L_f}$, podemos então concluir que:

$$\frac{lMv_0}{3}\hat{k} = I\vec{\omega}$$

$$\frac{lMv_0}{3}\hat{k} = \frac{2Ml^2}{3}\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{v_0}{2l}\hat{k}$$

10. Define-se como eixo x a direção horizontal, no sentido de $\vec{v_0} = v_0\hat{i}$, a direção vertical como eixo y, sendo o peso ($\vec{P} = -mg\hat{j}$), por fim, eixo z de tal forma que $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$.

Inicialmente, temos apenas a energia cinética translacional da bola. $E_{Ti} = \frac{mv_0^2}{2}$.

Durante o deslizar com atrito, parte da energia é dissipada e parte da energia translacional se transforma em rotacional, até que a uma distância d do início do deslizamento, a força de atrito não mais é acionada, e as energias translacionais e rotacionais se conservam a partir de então.

A força de atrito durante o freamento da bola, é constante, $\vec{F_{at}} = -mg\mu_c\hat{i}$.

A energia dissipada é dada por: $E_d = mg\mu_c d$.

A energia translacional final é dada por: $E_{Tf} = \frac{mv_f^2}{2}$.

Por fim a energia rotacional final é dada por: $E_{Rf} = \frac{I\omega_f^2}{2}$.

Onde o momento de inércia de uma esfera é dado por: $I = \frac{2}{5}mR^2$.

A força de atrito exerce torque durante o freamento, em relação ao centro de massa da bola, esse torque é dado por: $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} = I\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}$.
Sendo que no instante $t = 0$, de contato com o solo, temos $\omega(0) = 0$, e no segundo momento, temos $t = t_f$ temos $\omega(t_f) = \omega_f$, dado que o torque é constante, podemos escrever:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} = I\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}$$

$$\int_{t=0}^{t=t_f} \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} dt = I \int_{t=0}^{t=t_f} \vec{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{t})}$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}}(t_f - 0) = I(\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} - \vec{\boldsymbol{0}})$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} = \frac{\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} t_f}{I} \tag{1}$$

Dado que o torque é dado por $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{at}}$. Sendo $\vec{\boldsymbol{r}}$ o vetor entre o eixo de rotação (centro da bola) e o ponto de aplicação da força (ponto de contato com o solo), $\vec{\boldsymbol{r}} = -R\hat{\boldsymbol{j}}$.

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} = (-R\hat{\boldsymbol{j}}) \times (-mg\mu_c\hat{\boldsymbol{i}})$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{at}} = -Rmg\mu_c\hat{\boldsymbol{k}}$$

Que a partir de (1):

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} = \frac{-Rmg\mu_c t_f \hat{\boldsymbol{k}}}{I} \tag{2}$$

Já do ponto da atuação da força no movimento de translação, $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{at}} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}$, sendo que $\vec{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{0})} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t_f})} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{f}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{at}} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}$$

$$\int_{t=0}^{t=t_f} \vec{F_{at}} dt = m \int_{t=0}^{t=t_f} \vec{v(t)}$$
$$\vec{v_f} = \vec{v_0} + \frac{\vec{F_{at}} t_f}{m}$$
$$\vec{v_f} = \vec{v_0} + -g\mu_c t_f \hat{\imath} \tag{3}$$

Como a força de atrito e velocidade inicial são na direção $\hat{\imath}$, teremos também a velocidade final na direção $\hat{\imath}$.

No rolamento sem deslizar, temos que $v_f = \omega_f R$. Agora, a partir de (2), podemos afirmar que:

$$\frac{v_f}{R} = \frac{Rmg\mu_c t_f}{I}$$
$$\frac{v_f}{R} = \frac{Rmg\mu_c t_f}{\frac{2}{5}mR^2}$$
$$v_f = \frac{5g\mu_c t_f}{2}$$
$$t_f = \frac{2v_f}{5g\mu_c} \tag{4}$$

Portanto, de (3):

$$\vec{v_f} = \vec{v_0} - g\mu_c \frac{2v_f}{5g\mu_c}\hat{\imath}$$
$$\vec{v_f} = \vec{v_0} - \frac{2v_f}{5}\hat{\imath}$$
$$v_f = v_0 - \frac{2v_f}{5}$$
$$v_f = \frac{5v_0}{7}$$

De onde respondemos a questão (c):

$$\vec{v_f} = \frac{5\vec{v_0}}{7}$$

Com a eq (4) respondemos a questão (b):

$$t_f = \frac{2v_f}{5g\mu_c} = \frac{2\frac{5v_0}{7}}{5g\mu_c}$$

$$t_f = \frac{2v_0}{7g\mu_c}$$

Já para a questão (a), a partir da energia inicial (E_{Ti}) de onde parte é dissipada durante o atrito E_d, restando a energia translacional e rotacional final, E_{Tf} e E_{Rf}, podemos escrever:

$$E_{Ti} = E_d + E_{Tf} + E_{Rf}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\mu_c d + \frac{mv_f^2}{2} + \frac{I\omega_f^2}{2}$$

Substituindo os termos conhecidos:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\mu_c d + \frac{m\left(\frac{5v_0}{7}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{5v_0}{7R}\right)^2}{2}$$

note que já foi usado $\omega_f = \frac{v_f}{R}$.

$$\frac{v_0^2}{2} = g\mu_c d + \frac{\left(\frac{5v_0}{7}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5v_0}{7}\right)^2}{2}$$

$$\frac{v_0^2}{2} = g\mu_c d + \frac{\left(\frac{5v_0}{7}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{5v_0}{7}\right)^2}{5}$$

$$v_0^2 = 2g\mu_c d + \frac{35v_0^2}{7^2}$$

$$2g\mu_c d = \frac{(49-35)\,v_0^2}{49}$$

Por fim:

$$d = \frac{v_0^2}{7g\mu_c}$$

11. A energia inicial é dada pela energia de rotação (E_{Ri}), que se dividirá em energias de translação(E_{Tf}) e rotação (E_{Rf}) finais.
Temos a energia de rotação inicial: $E_{Ri} = \frac{I\omega_0^2}{2}$.
Onde, para a roda da bicicleta (momento de inércia de um anel), $I = mR^2$.
Para a energia de translação final: $E_{Tf} = \frac{mv^2}{2}$.
Por fim a energia de rotação final: $E_{Rf} = \frac{I\omega_f^2}{2}$.

Da conservação de energia:

$$E_{Ri} = E_{Tf} + E_{Rf}$$

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{I\omega_f^2}{2}$$

Como anteriormente, rodando sem atrito, temos $v_f = \omega_f R$, e substituindo o momento de inércia.

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{mR^2 v_f^2}{2R^2}$$

$$v_f = \frac{R\omega_0}{\sqrt{2}}$$