Aula 17 – Séries de potências

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Definição 1

Uma **série de potências centrada em** a *(ou* **em torno de** a*) é uma função real definida por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

onde a *e cada* c_n *são constantes reais e* x *é a variável da função, cujo domínio é o conjunto de pontos onde a série converge.*

Observação 1

Consideramos $0^0 = 1$*.*

Observação 2

Note que, diferentemente das séries em geral, aqui exigimos que a soma começa de 0*. Se quisermos começar em* $n_0 > 0$*, basta considerarmos* $c_0 = \ldots = c_{n_0 - 1} = 0$*.*

Teorema 1 (Teorema do Raio de Convergência)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *é uma série de potências centrada em* a*, um dos seguintes casos ocorre:*

(a) *a série converge se, e somente se,* $x = a$*;*

(b) *a série converge para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(c) *existe um número real* $R > 0$ *tal que a série converge quando* $|x-a| < R$ *e diverge quando* $|x-a| > R$*.*

Definição 2

Definimos o **raio de convergência** *da série de potências como:*

(a) 0*, se for o caso* (a) *do Teorema 1;*

(b) ∞*, se for o caso* (b) *do Teorema 1;*

(c) R*, se for o caso* (c) *do Teorema 1.*

Também chamamos o domínio de uma série de potências de **intervalo de convergência***.*

Exemplo 1

Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$.

Teorema 2

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tem raio de convergência não nulo, então* f *é derivável e tanto a derivada quanto a primitiva de* f *é calculada termo a termo. Isto é:*

- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$;
- $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$.

Além disso, cada uma das séries de potências acima terá o mesmo raio de convergência de f.

Observação 3

Podemos resumir o Teorema 2 como:

- $\displaystyle \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-a)^n];$
- $\displaystyle \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int [c_n(x-a)^n]\, dx.$

Exemplo 2

Usando o Teorema da Existência e Unicidade para Equações Diferenciais, prove que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exemplo 3

Encontre uma representação em série de potências de cada uma das seguintes funções, determinando seu raio de convergência.

- $\dfrac{1}{1-x}$.
- $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.
- $ln(x+1)$.
- $\operatorname{arctg} x$.

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{1}{1+x^7}dx$ *usando série de potências.*

Fim