

questão 6 - lista 2

a) Se o governo pode se comprometer com a taxa de inflação anunciada, a expectativa que o público forma em relação a inflação após o anúncio é a própria inflação.

Da curva de Phillips:

$$y_t = y_n + \alpha(\pi_t - \pi_t^e)$$

Como $\pi_t = \pi_t^e \rightarrow \boxed{y_t = y_n}$

A função perda do governo é

$$L(\pi_t, y_t) = \frac{1}{2} \lambda (y_t - y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi_t - \pi^*)^2$$

Como o governo está preso pelo anúncio,

$$y_t = y_n, \text{ logo}$$

$$L(\pi_t, y_t) = \frac{1}{2} \lambda (y_n - y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi_t - \pi^*)^2$$

Para minimizar a expressão acima em relação a π_t , o governo escolhe $\pi_t = \pi^*$

Logo, $\boxed{Y_t = Y_m}$ e $\boxed{\pi_t = \pi^*}$

A perda do governo é dada por:

$$\frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2$$

b) Na situação de não comprometimento,

o governo toma como dado a expectativa de inflação π_t^e e resolve o seguinte problema

$$\min_{Y_t, \pi_t} \frac{1}{2} \lambda (Y_t - Y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi_t - \pi^*)^2$$

s.a. $Y_t = Y_m + \alpha (\pi_t - \pi_t^e)$

que é equivalente a:

$$\min_{\pi_t} \frac{1}{2} \lambda (Y_m + \alpha (\pi_t - \pi_t^e) - Y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi_t - \pi^*)^2$$

Condição de Primeiro ordem:

$$\textcircled{1} \lambda (Y_m - Y^* + \alpha (\pi_t - \pi_t^e)) \alpha + \pi_t - \pi^* = 0$$

Supondo que o público tenha expectativas racionais, este sabe que ao "chutar"

π_t^e , o governo escolhe π_t usando $\textcircled{1}$

Logo, ele resolve de trás para frente o problema de modo que $\pi_t^e = \pi_t$.

Fazendo $\pi_t = \pi_t^e$ em ①

$$\alpha \lambda (y_n - y^*) + \pi_t - \pi^* = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\pi_t = \pi^* - \alpha \lambda (y_n - y^*)}$$

Como $y^* > y_n$, segue que $\pi_t > \pi^*$

Como $\pi_t = \pi_t^e$, $\boxed{y_t = y_n}$

A perda do governo neste caso é:

$$\frac{1}{2} \lambda (y_n - y^*)^2 + \frac{1}{2} (-\alpha \lambda (y_n - y^*))^2$$

$$= \frac{1}{2} \lambda (y_n - y^*)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 (y_n - y^*)^2 > \frac{1}{2} \lambda (y_n - y^*)^2$$

Logo o governo tem perda maior no caso sem comprometimento.

Rescrevendo a perda:

$$\frac{1}{2} \lambda (y_n - y^*)^2 (1 + \alpha^2 \lambda)$$

c) Em qualquer instante t , a perda do governo ao longo do tempo caso ele mantenha a estratégia de comprometimento é dada por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \frac{1}{2} \lambda (Y_t - Y^*)^2 = \frac{1}{2} \lambda (Y_0 - Y^*)^2 \cdot \frac{1}{1-\beta}$$

Porém, em um dado instante t , o governo pode ficar tentado a desviar da estratégia de comprometimento, isto é:

O público espera comprometimento do governo. Logo, sua expectativa é $\pi_t^e = \pi^*$.

O governo minimiza então:

$$\frac{1}{2} \lambda (Y_t + \alpha(\pi_t - \pi^*) - Y^*)^2 + \frac{1}{2} (\pi_t - \pi^*)^2$$

CPO:

$$\lambda \alpha (Y_t - Y^* + \alpha(\pi_t - \pi^*)) + \pi_t - \pi^* = 0$$

$$\pi_t \cdot (\lambda \alpha^2 + 1) = \pi^* (1 + \lambda \alpha^2) - \lambda \alpha (Y_t - Y^*)$$

$$\rightarrow \pi_t = \pi^* - \frac{\lambda \alpha (Y_t - Y^*)}{1 + \lambda \alpha^2}$$

$$\pi_t - \pi^* = \frac{-\lambda \kappa (y_m - y^*)}{1 + \lambda \kappa^2}$$

E a perda do governo no instante t será dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \lambda \cdot \left(y_m - y^* - \frac{\kappa^2 \lambda}{1 + \lambda \kappa^2} (y_m - y^*) \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda \kappa^2}{(1 + \lambda \kappa^2)} (y_m - y^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} \lambda \cdot \frac{(1 + \lambda \kappa^2)}{(1 + \lambda \kappa^2)^2} \cdot (y_m - y^*)^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda (y_m - y^*)^2}{1 + \lambda \kappa^2} \triangleq X \end{aligned}$$

Uma vez que ele desuía e quebra o comprometimento para instantes futuros, a perda do governo é incerta para o caso b:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \cdot \frac{1}{2} \lambda (y_m - y^*)^2 (1 + \kappa^2 \lambda) = \frac{1}{2} \lambda (1 + \kappa^2 \lambda) \cdot (y_m - y^*)^2 \cdot \frac{\beta}{1 - \beta}$$

Para que a estratégia de comprometimento
seja sustentável, demonstrar:

$$\frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2 \frac{1}{1-\beta} \leq X + \frac{1}{2} \lambda (1+\alpha^2 \lambda) (Y_m - Y^*)^2 \frac{\beta}{1-\beta}$$

$$\Leftrightarrow - \frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2 \leq X(1-\beta) + \frac{1}{2} \lambda (1+\alpha^2 \lambda) (Y_m - Y^*)^2 \beta$$

$$\rightarrow \beta \left(\frac{1}{2} \lambda (1+\alpha^2 \lambda) \cdot (Y_m - Y^*)^2 - X \right) > \frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2 - X$$

$$\frac{1}{2} \lambda (1+\alpha^2 \lambda) \cdot (Y_m - Y^*)^2 - \frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2$$

$$= \frac{1}{2} \lambda \cdot (Y_m - Y^*)^2 \cdot ((1+\alpha^2 \lambda)^2 - 1) > 0$$

$$\frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2 - X = \frac{1}{2} \lambda (Y_m - Y^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda (Y_m - Y^*)^2}{1+\lambda \alpha^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda \cdot (\lambda \alpha^2)}{1+\lambda \alpha^2} (Y_m - Y^*)^2 = \frac{1}{2} \frac{(Y_m - Y^*)^2 \cdot \lambda^2 \alpha^2}{1+\lambda \alpha^2}$$

Logo, $\beta > \frac{\frac{1}{2} \frac{(Y_m - Y^*)^2 \cdot \lambda^2 \alpha^2}{1+\lambda \alpha^2}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda (Y_m - Y^*)^2 \cdot ((1+\alpha^2 \lambda)^2 - 1)}{1+\alpha^2 \lambda}} \rightarrow$

$$\beta > \frac{\lambda \alpha^2}{(1+\alpha^2 \lambda)^2 - 1} = \frac{\lambda \alpha^2}{(1+\alpha^2 \lambda + 1)(1+\alpha^2 \lambda - 1)} = \frac{1}{2 + \alpha^2 \lambda}$$