30-3 A equação de onda para ondas eletromagnéticas

Vamos tomar duas das equações de Maxell

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S B_n\, dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dA$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d), \text{ onde } I_d = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t}\, dA$$

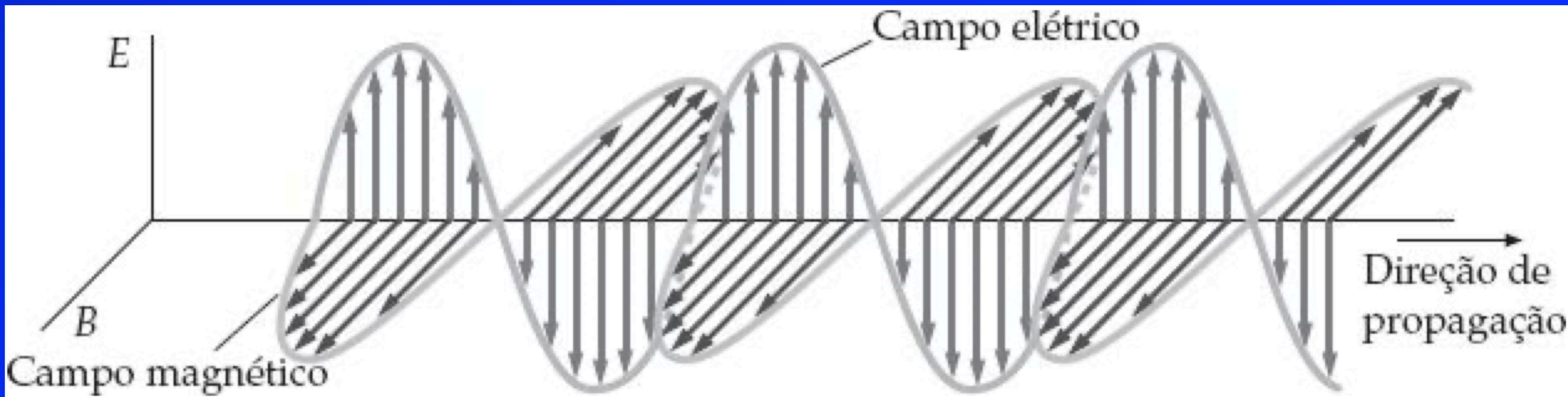
Que são a lei de Faraday,
para o caso restrito de campo magnético com variação no tempo
e a lei de Ampère generalizada,
com a inclusão da corrente de deslocamento.

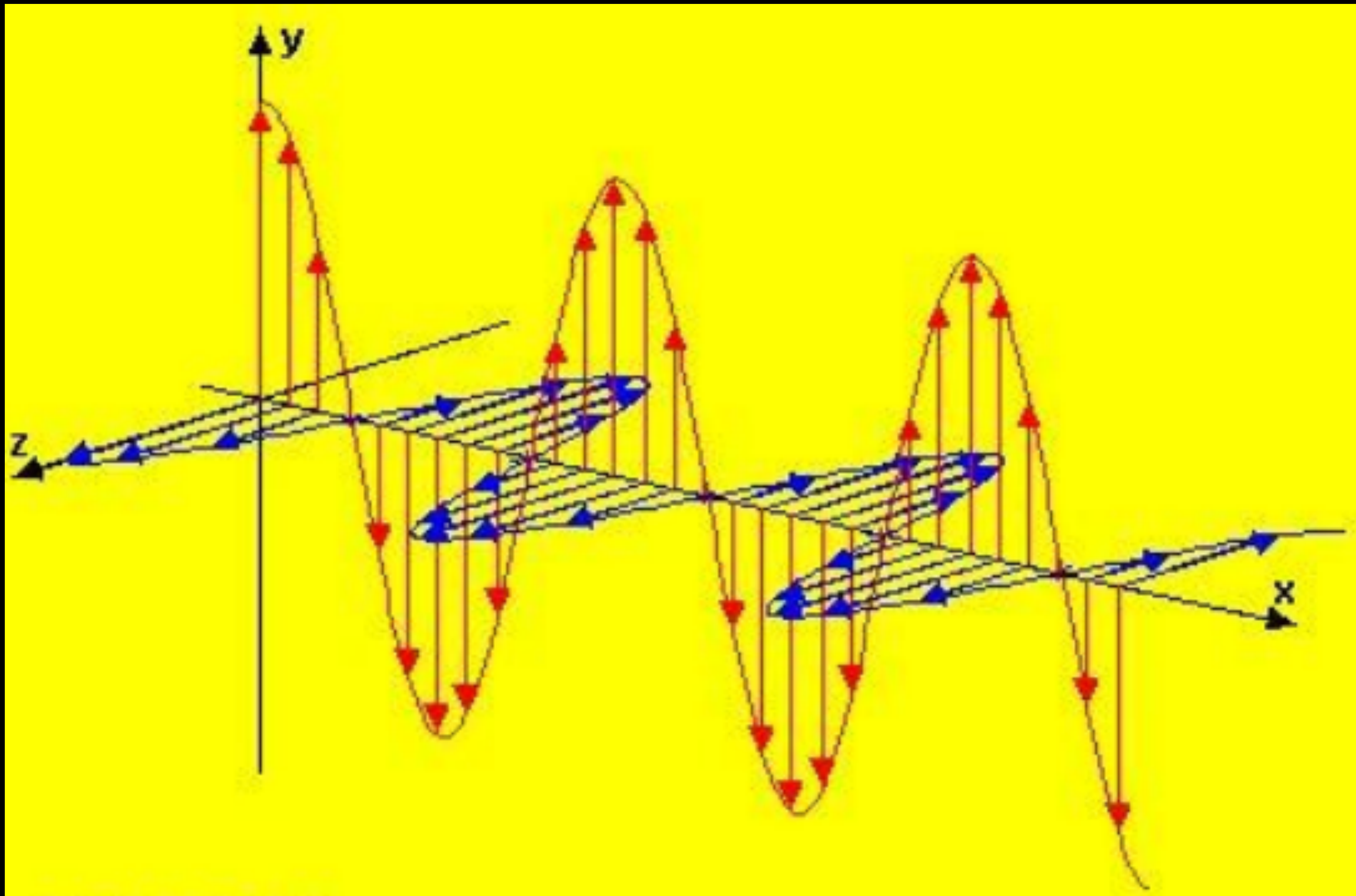
No que se segue, consideraremos apenas o espaço vazio (espaço no qual não existem cargas nem correntes) e que os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ são funções do tempo e de apenas uma coordenada espacial, que consideraremos como a coordenada x (direção de propagação).

Veremos que as ondas eletromagnéticas são uniformes ao longo de qualquer plano perpendicular ao eixo x, ditas *ondas planas*. Mais do que isso, a direção de propagação de uma onda eletromagnética é sempre a direção e sentido do produto vetorial

$$\vec{E}\times\vec{B}$$

E os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ são perpendiculares entre si.

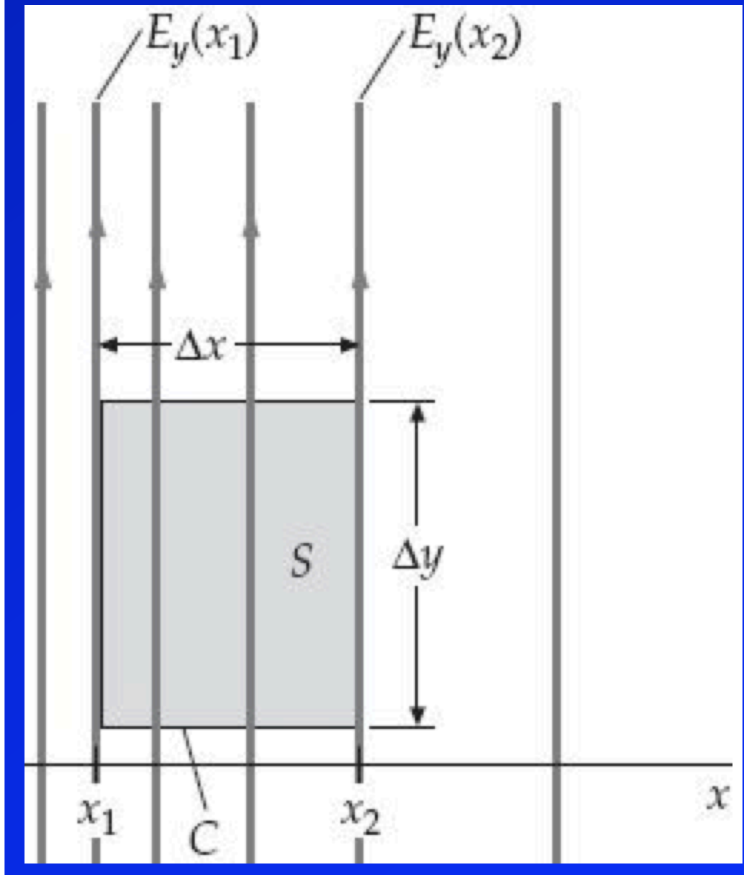



y
z
x

Aplicando a lei de Faraday à curva retangular de lados Δx e Δy da figura, a circulação de $\vec{E}$ em torno de C, para pequenos Δx e Δy é

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_y(x_2)\Delta y - E_y(x_1)\Delta y = [E_y(x_2) - E_y(x_1)]\Delta y$$

sendo que as contribuições do tipo $E_x \Delta x$ da parte de cima e de baixo são zero, desde que E_x=0.



Considerando Δx muito pequeno, podemos considerar

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E_y \approx \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x$$

portanto

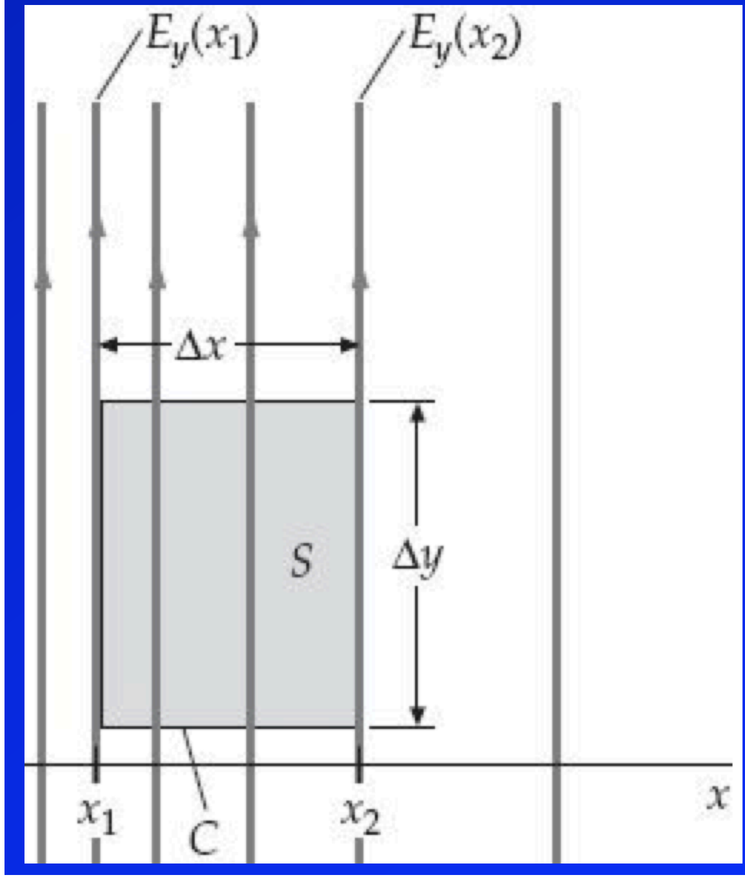
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \approx \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\,\Delta y$$

Do slide passado, temos $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \, \Delta y$ e

da lei de Faraday $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$ onde

$$\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n \, dA \cong \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

que é o fluxo de $\frac{\partial B_z}{\partial t}$ através da superfície retangular limitada pela curva *C*. Assim $\frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \, \Delta y = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \, \Delta y$



e, portanto $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ o que significa que se houver um campo magnético $\vec{B}$ variando no tempo, teremos um campo elétrico $\vec{E}$, perpendicular a $\vec{B}$, sendo gerado.

Tomando agora a lei de Ampère generalizada

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d), \text{ onde } I_d = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t}\, dA$$

Para o caso de ausência de corrente *I*, temos

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t}\, dA$$

que mostra claramente a simetria entre os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dA$$

(Lei de Faraday usada para chegar em $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$).

Assim, usando os mesmos argumentos anteriores, teremos da lei de Ampère generalizada

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Dos slides anteriores temos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Tomando a equação da esquerda e diferenciando ambos os lados com relação a *x*, temos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

onde podemos substituir a equação da esquerda (acima), obtendo

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right)$$

que resulta em

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

que é uma equação de onda para ondas, com velocidade $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Para quem já viu propagação de ondas em uma corda, com certeza já viu uma equação diferencia parcial chamada de equação de onda

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

onde *y*(*x*, *t*) é a função de onda que, para ondas em cordas, é o deslocamento da corda.
A velocidade *v* da onda deve aparecer como na equação geral acima.

Comparando essa equação com a que obtivemos para o campo elétrico

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Fica muito claro que esta é uma equação de onda para ondas, com velocidade $v = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ **.**

Retomando as equações anteriores

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Se diferenciarmos a equação da direita em ambos os lados com relação a *x*, chegaremos exatamente no mesmo resultado para o campo magnético $\vec{B}$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Assim, temos que, tanto o campo elétrico $\vec{E}$,
como o campo magnético $\vec{B}$
obedecem à equação de onda para ondas com velocidade $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Para mostrar que o campo magnéticos B_z oscila em fase com o campo elétrico E_y, considere a solução da equação de onda na forma $E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ que substituindo em $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$, obtida em slides anteriores, teremos

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \cos(kx - \omega t)$$

Integrando a equação em dt, podemos obter B_z, assim,

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = \frac{k}{\omega} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária de x.

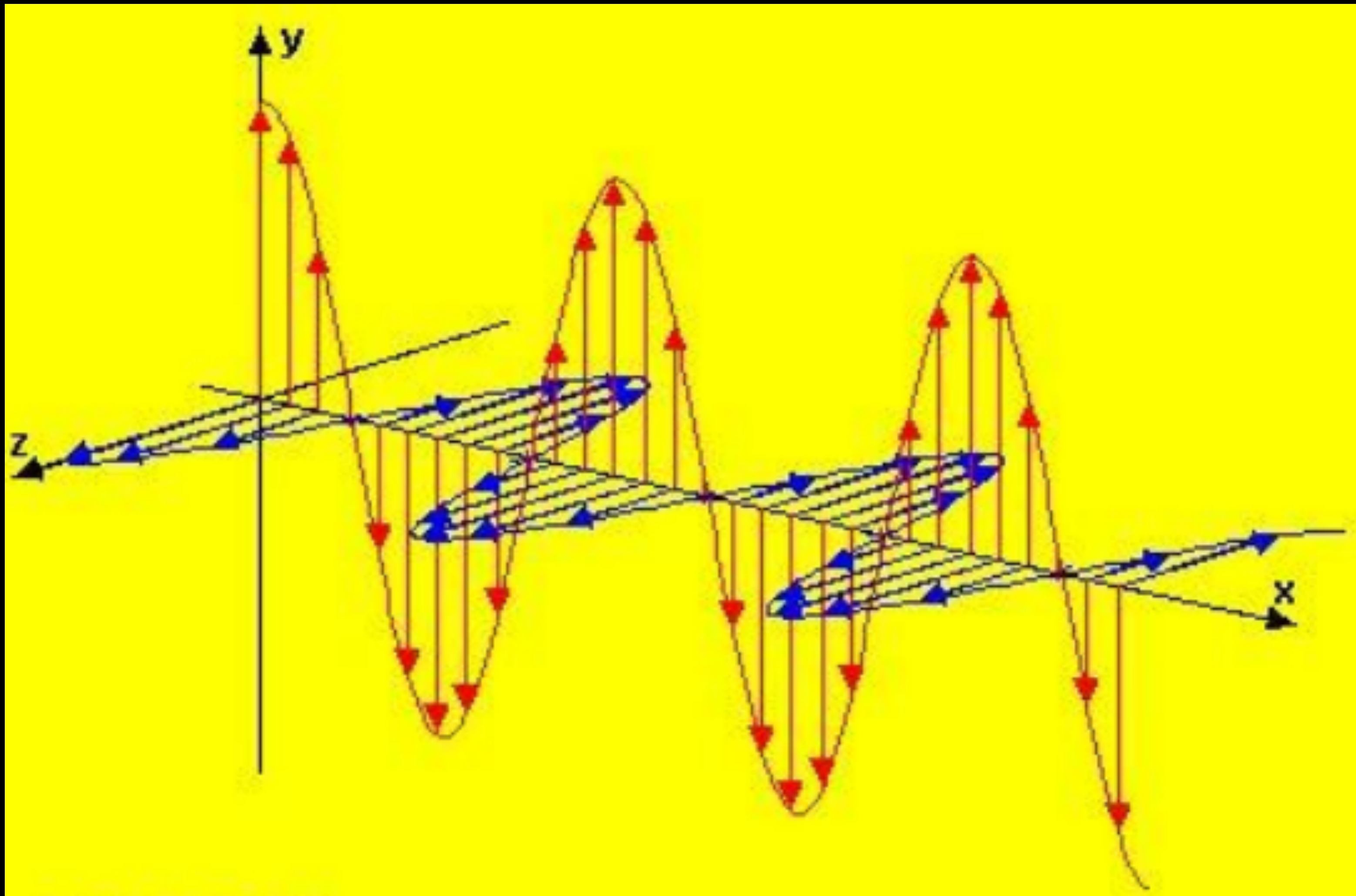
Substituindo agora este resultado em $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$, temos

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega \mu_0 \epsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t)$$

que integrando em dx, temos

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{k} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

onde $g(t)$ é uma função arbitrária de t.


y
z
x

Para mostrar que o campo magnéticos B_z oscila em fase com o campo elétrico E_y, considere a solução da equação de onda na forma $E_y = E_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$ que substituindo em $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$, obtida em slides anteriores, teremos $\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \cos(kx - \omega t)$

Integrando a equação em dt, podemos obter B_z, assim,

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = \frac{k}{\omega} E_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t) + f(x)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária de x.

Substituindo agora este resultado em $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$, temos

$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega \mu_0 \epsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t)$ que integrando em dx, temos

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{k} E_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

onde $g(t)$ é uma função arbitrária de t.

Do slide anterior obtivemos que

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = \frac{k}{\omega} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x)$$

e

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{k} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

assim

$$\frac{k}{\omega} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{k} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

onde $c = \frac{\omega}{k}$ e $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$

$$\frac{1}{c} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + f(x) = \frac{1}{c} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + g(t)$$

o que implica que $f(x) = g(t)$ para todos os valores de x e t, portanto $f(x) = g(t) =$ constante (independente de x e de t).

Assim, da primeira equação acima,

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \text{constante}$$

Retomando a última equação do slide anterior

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t) + \text{constante} = B_0 \,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

onde $B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$.

k é conhecido como "número de onda" $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,

onde λ **é o comprimento de onda e**

ω **é a "frequência angular" dada por** $\omega = 2\pi f$

onde f **é a frequência da onda em Hz.**

Assim, $\frac{\omega}{k} = f\lambda = c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

A constante de integração foi abandonada porque ela não desempenha nenhum papel na onda.

Ela apena permite a presença de um campo magnético estático e uniforme.

A equação em que chegamos

$$B_z = \frac{1}{c} E_0 \sin(kx - \omega t) = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

mostra claramente que os campos elétricos e magnéticos oscilam em fase e têm a mesma frequência.

Somado a isso, temos ainda que

$$E = cB$$

A direção de propagação de uma onda eletromagnética é dada por $\vec{E} \times \vec{B}$.

Considerando os campos elétrico e magnéticos descritos na discussão anterior

$$\vec{E} \times \vec{B} = [E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{j}] \times [B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\hat{k}] = E_0 B_0 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\hat{i}$$

Assim a direção de propagação da onda, neste caso, é na direção do eixo $+x$, como assumido inicialmente.

Exemplo 30-3 $\vec{B}(x,t)$ para uma onda plana linearmente polarizada

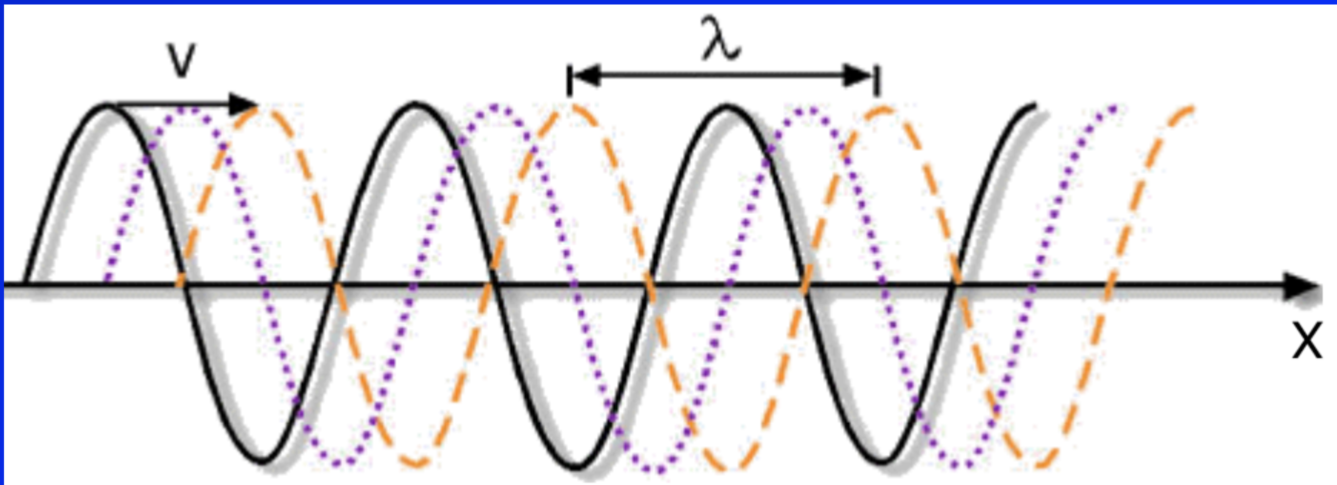
A expressão para o campo elétrico de certa onda eletromagnética é dada por $\vec{E}(y,t) = E_0 \sin(ky + \omega t)\,\hat{k}$.

(a) Qual é a direção de propagação da onda?

(b) Qual a expressão correspondente para o campo magnético na onda?

(a) Como vimos, uma onda que se propaga na direção positiva de *x*, é descrita por $\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{\imath}$.

Como a dependência espacial está em *y*, a propagação é na direção do eixo *y*.



Quanto ao sentido, quando temos o sinal que antecede ω trocado, a velocidade é no sentido negativo do eixo $\therefore \quad -\hat{\jmath}$

Exemplo 30-3 $\vec{B}(x,t)$ para uma onda plana linearmente polarizada

A expressão para o campo elétrico de certa onda eletromagnética é dada por $\vec{E}(y,t) = E_0 \sin(ky + \omega t)\,\hat{k}$.

(a) Qual é a direção de propagação da onda?

(b) Qual a expressão correspondente para o campo magnético na onda?

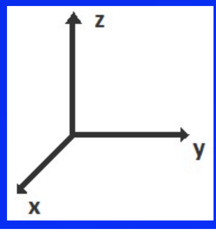
(b) Como sabemos, $\vec{B}$ está em fase com $\vec{E}$ e é perpendicular a $\vec{E}$ e à direção de propagação $-\hat{j}$ (isto é, $\vec{B}$ é perpendicular a $\hat{j}$ e $\hat{k}$). Assim,

$$\vec{B}(y,t) = +B_0 \text{ sen}(kx - \omega t)\hat{i} \text{ ou}$$
$$\vec{B}(y,t) = -B_0 \text{ sen}(kx - \omega t)\hat{i}$$

Mas também sabemos que $\vec{E}\times\vec{B}$ está na direção de $-\hat{j}$ então $\rightarrow$ sendo a segunda "tentativa" a correta.

$$\begin{aligned}
\vec{E} \times \vec{B} &= E_0 \text{ sen}(ky + \omega t)\hat{k} \times B_0 \text{ sen}(ky + \omega t)\hat{i} \\
&= E_0 B_0 \text{ sen}^2(ky + \omega t)(\hat{k} \times \hat{i}) \\
&= E_0 B_0 \text{ sen}^2(ky + \omega t)\hat{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} \times \vec{B} &= E_0 \text{ sen}(ky + \omega t)\hat{k} \times (-B_0) \text{ sen}(ky + \omega t)\hat{i} \\
&= E_0(-B_0) \text{ sen}^2(ky + \omega t)(\hat{k} \times \hat{i}) \\
&= -E_0 B_0 \text{ sen}^2(ky + \omega t)\hat{j}
\end{aligned}$$



Exemplo 30-3 $\vec{B}(x,t)$ para uma onda plana linearmente polarizada

A expressão para o campo elétrico de certa onda eletromagnética é dada por $\vec{E}(y,t) = E_0 \sin(ky + \omega t)\,\hat{k}$.

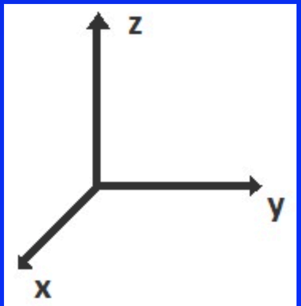
(a) Qual é a direção de propagação da onda?

(b) Qual a expressão correspondente para o campo magnético na onda?

(b) Assim, $\vec{B}(y,t) = -B_0 \sin(ky + \omega t)\,\hat{\imath}$

onde $B_0 = {}^{E_0}/_{c}$

Notem que, o sistema de coordenadas cartesianas a ser usado deve ser positivo. Nesse caso $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$.



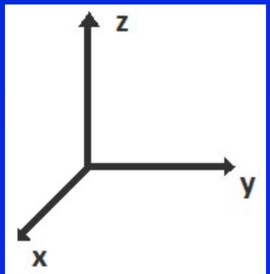
Exemplo 30-4 $\vec{B}(x,t)$ para uma onda plana circularmente polarizada

A expressão para o campo elétrico de certa onda eletromagnética é dada por $\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$.
(a) Determine o campo magnético correspondente para a mesma onda. (b) Calcule $\vec{E} \cdot \vec{B}$ e $\vec{E} \times \vec{B}$.

Podemos resolver utilizando o princípio da superposição.
(a) A direção de propagação é do eixo x, sentido positivo $+\hat{\imath}$.
O campo elétrico pode ser considerado como a superposição de
$\vec{E}_1(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{j}$ e $\vec{E}_2(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$

Para $\vec{E}_1 = E_0 \,\text{sen}(kx - \omega t)\,\hat{j}$, $\vec{B}_1 = B_0 \,\text{sen}(kx - \omega t)\,\hat{k}$, onde $B_0 = E_0/c$

Para $\vec{E}_2 = E_2 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$, $\vec{B}_2 = -B_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{j}$, onde $B_0 = E_0/c$.



Então
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B_0 \,\text{sen}(kx - \omega t)\hat{k} - B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j}$$

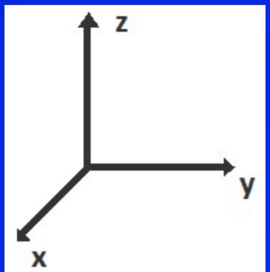
onde $B_0 = E_0/c$

Exemplo 30-4 $\vec{B}(x,t)$ para uma onda plana circularmente polarizada

A expressão para o campo elétrico de certa onda eletromagnética é dada por $\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$. (a) Determine o campo magnético correspondente para a mesma onda. (b) Calcule $\vec{E}\cdot\vec{B}$ e $\vec{E}\times\vec{B}$.

(b) Para simplificar a notação, tomaremos $\theta = kx - \omega t$

$$\begin{aligned}
\vec{E}\cdot\vec{B} &= (E_0 \operatorname{sen}\theta\ \hat{j} + E_0 \cos\theta\,\hat{k})\cdot(B_0 \operatorname{sen}\theta\ \hat{k} - B_0\cos\theta\,\hat{j}) \\
&= E_0B_0 \operatorname{sen}^2\theta\ \hat{j}\cdot\hat{k} - E_0B_0 \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\,\hat{j}\cdot\hat{j} \\
&\quad + E_0B_0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\ \hat{k}\cdot\hat{k} - E_0B_0\cos^2\theta\,\hat{k}\cdot\hat{j} \\
&= 0 - E_0B_0 \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta + E_0B_0\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 0 = \boxed{0}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\vec{E}\times\vec{B} &= (E_0 \operatorname{sen}\theta\ \hat{j} + E_0\cos\theta\,\hat{k})\times(-B_0\cos\theta\,\hat{j} + B_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}) \\
&= -E_0B_0\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\,(\hat{j}\times\hat{j}) + E_0B_0\operatorname{sen}^2\theta\ (\hat{j}\times\hat{k}) \\
&\quad - E_0B_0\cos^2\theta\,(\hat{k}\times\hat{j}) + E_0B_0\cos\theta\operatorname{sen}\theta\ (\hat{k}\times\hat{k}) \\
&= 0 + E_0B_0\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{i} + E_0B_0\cos^2\theta\,\hat{i} + 0 = \boxed{E_0B_0\hat{i}}
\end{aligned}$$

Exemplo 30-4 $\vec{B}(x,t)$ para uma onda plana circularmente polarizada

A expressão para o campo elétrico de certa onda eletromagnética é dada por $\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{j} + E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$.
(a) Determine o campo magnético correspondente para a mesma onda. (b) Calcule $\vec{E} \cdot \vec{B}$ e $\vec{E} \times \vec{B}$.

(b) Assim, $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, claro, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares.
$\vec{E} \times \vec{B} = E_0\, B_0\, \hat{\imath}$, já sabíamos que a direção de propagação era de +*x*.

Esse tipo de onda eletromagnética está polarizada circularmente.
Em um valor fixo de *x* ,
$\vec{E}$ e $\vec{B}$ giram em um circulo com frequência angular de ω.