O Axioma da Escolha

- Apenas darei algumas ideias e resultados sobre o Axioma da Escolha, sem demonstrações.

- O Axioma da Escolha aparece quando temos uma coleção infinita e queremos escolher um elemento de cada conjunto da coleção.

Exemplos:

1. Suponha que você tem infinitos pares de sapatos e quer escolher um pé de cada par de sapato. É possível fazer essa escolha colocando uma regra, por exemplo, pegar sempre o direito. Nesse caso não precisa de nenhum "axioma extra" para ter o conjunto. Por outro lado, suponha agora que você tem infinitos pares de meia e quer escolher um pé de cada meia. Não temos como colocar uma regra (estamos supondo que os dois pés de meia são iguais). Tem que selecionar um pé de cada meia. Nesse caso sim precisamos de um "axioma extra" para garantir a existência do conjunto formado por um pé de cada meia.

2. Seja E uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $A/E = \{[a]_E : a \in A\}$.

Quando se trabalha com as classes de equivalência, em geral, é mais conveniente trabalhar com os representantes das classes. Por isso é interessante formar um "conjunto de representantes", ou seja, um conjunto $X \subset A$ tal que $\forall [a]_E \in A/E$, $[a]_E \cap X = \{b\}$, para algum $b \in [a]_E$ ($\therefore$ X é formado por exatamente um representante de cada classe de equivalência).

<u>Pergunta</u>: Dado A e a rel. de eq. E, existe um conjunto de representantes?

Aqui também precisamos de um "axioma extra" (se A for infinito).

- Nos dois exemplos, o "axioma extra" que precisamos é o Axioma de Escolha:

<u>Def</u>: Seja S uma família de conjuntos não vazios (ou seja, $\emptyset \notin S$). Uma <u>função escolha</u> para S é uma função f em S tal que $f(x) \in x$ $\forall x \in S$.

Agora podemos definir:

<u>Axioma de Escolha</u> (AE) Toda família de conjuntos não vazios possui uma função escolha.

- O A.E. foi formulado por Zermelo em 1904, mas já era usado por analistas desde pelo menos final do sec XIX. Demoraram vários anos para perceber que assumir a existência de função escolha não é algo trivial.
- Somente em 1963, Paul Cohen mostrou que o Axioma de Escolha não pode ser provado a partir dos outros axiomas de ZF.
- Atualmente, em geral, assume-se o Axioma de Escolha, junto os axiomas de ZF. Essa axiomática é chamada de ZFC.

- Vamos agora ver algumas equivalências do A.E (só vou enunciar os teoremas) e aplicações.

<u>Teorema</u>: São equivalentes:

(a) A.E

(b) Toda partição tem um conjunto de representantes.

(c) Se $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de conjuntos não-vazia indexada, então $\exists$ uma função f tal que $f(i) \in X_i$ $\forall i \in I$ (ou seja, $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ se $X_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$)

Teorema: São equivalentes:

(a) A.E.

(b) (O princípio da boa-ordem) Todo conjunto pode ser bem ordenado.

(c) (Lema de Zorn) Se toda cadeia de um conjunto parcialmente ordenado tem limitante superior, então o conjunto parcialmente ordenado tem elemento maximal.

($C \subseteq P$ é uma cadeia se $\forall a, b \in C$, $a \leq b$ ou $b \leq a$)

• Alguns resultados da Teoria dos Conjuntos que precisa do A.E:

Teorema Assumindo o A.E, vale que:

(a) Todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável

(b) $\forall$ A, B, conjuntos, vale que $|A| \leq |B|$ ou $|B| \leq |A|$

(c) A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

(d) Se f é uma função e A um conjunto, então $|f(A)| \leq |A|$

(e) Se $\exists f: A \to B$ sobrejetora, então $|B| \leq |A|$.

• Usando o A.E. (na verdade a boa ordem) é possível definir um número cardinal $|X|$, $\forall$ conj X, que funciona como uma "medida do nº de elem. de X".

• Alguns resultados de outras áreas da matemática onde se usa o A.E na demonstração:

1) (Em Análise Real): Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em a $\iff$ $\forall$ sequência $x_n \to a$, segue que $f(x_n) \to f(a)$.

2) (Em "topologia da reta"): Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \bar{A} \iff \exists$ uma sequência $\{x_k\} \subset A$ tal que $x_k \to x$

4) (Em Álgebra Linear): Todo espaço vetorial tem uma base

(Usa o Lema de Zorn para mostrar para espaços vetoriais de dimensão qualquer, não necessariamente finita)

5) (Em Álgebra): Existe o fecho algébrico de um corpo.

<u>Obs final</u>: O axioma de escolha só é necessário quando precisamos escolher um x p/ cada conjunto, se temos uma família infinita de conjuntos. $A_i \neq \emptyset$ $\forall i$

Se temos $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$ com e precisamos construir um conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $x_i \in A$ $\forall i = 1, \dots, n$, não é usado o Axioma de Escolha. Se $A_i \neq \emptyset$, ao pegarmos $x_i \in A_i$, não usamos AE, e sim o fato de $A_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_i \in A_i$, e $\therefore$ pela "definição" do existencial, pode-se "escolher" $x_i \in A_i$, este x_i é uma "testemunha" de que $A_i \neq \emptyset$.