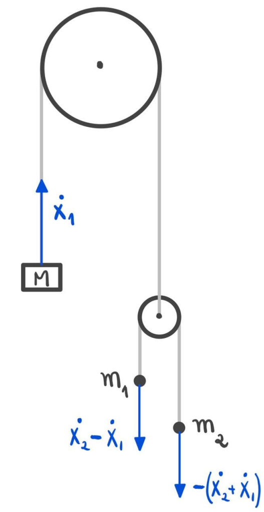
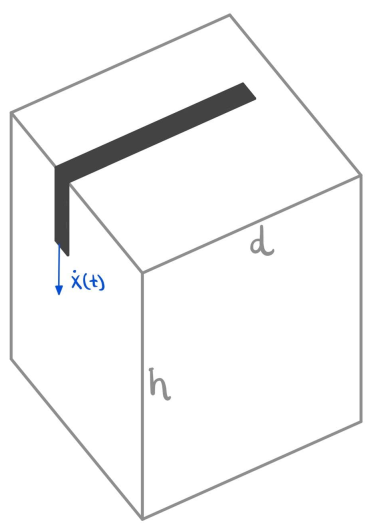
1 Perguntas

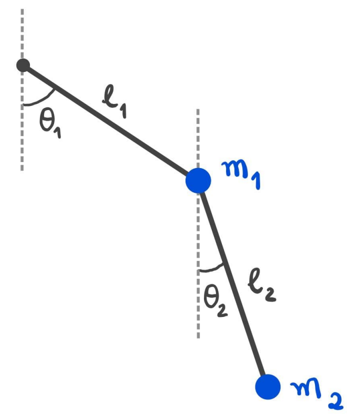
Pergunta 1. Considere o sistema de polias da figura abaixo e a aceleração da gravidade g. A posição do bloco de massa M em relação à polia maior é descrita por $x_1(t)$ e a posição da bolinha de massa m_1 em relação à polia menor é descrita por $x_2(t)$. Escreva a Lagrangiana e a equação de Euler-Lagrange para esse sistema.



Pergunta 2. Considere uma caixa com altura h e base quadrada de lado $d << h$, uma fita de comprimento d em cima dessa caixa escorrega pelo lado dela sem sofrer atrito. Suponha que a fita tem massa equidistribuída M e que a aceleração da gravidade é g. Escreva o Lagrangiano da fita e em seguida a equação de Euler-Lagrange para o sistema.



Pergunta 3. Descreva a Lagrangiana e as equações de Euler-Lagrange do pêndulo duplo em função da aceleração da gravidade g e das variáveis $l_1, l_2, m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$ descritas na ilustrção abaixo.



Pergunta 4. Um sistema relativístico não é descrito pelas equações de Newton. Se $x(t)$ é a posição de uma partícula de massa m_0 se movimentando no espaço sobre ação de um campo $V(x)$, temos que energia cinética dela é descrita pela equação

$$T(x, \dot{x}, t) = m_0 c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] ,$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. A partir disso, escreva o Lagrangiano e em seguida a equação de Euler-Lagrange desse sistema. Também, escreva o Hamiltoniano correspondente em função do momento $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.

Pergunta 5. Considere o seguinte sistema de coordenadas $(q_1, ..., q_2, p_1, ..., p_n)$ em $\mathbb{R}^{2n}$. Tome $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ tal que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de H. Considere $Id \in \mathcal{M}_{n \times x}$ a matrix identidade $n \times n$ e a matrix simplética

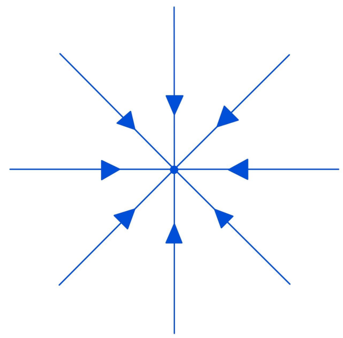
$$\omega_0 := \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix} .$$

Mostre que o campo vetorial X_H definido pelas equações de Hamilton satisfaz $X_H \cdot \omega_0 = dH$. Além disso, prove que $S := H^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{2n}$ e que $X_H(x) \in T_x S$ para todo $x \in S$.

Agora, considere outro Hamiltoniano H_2 tal que também tem S como uma superfície regular. Mostre que existe uma função $\rho \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ tal que

$$X_H \mid_S = \rho \cdot X_{H_2} \mid_S .$$

Pergunta 6. Considere um campo vetorial bi-dimensional como o da imagem abaixo. Diga em 1 linha o porquê desse campo não ser hamiltoniano:



Pergunta 7. Seja H uma função Hamiltoniana em $\mathbb{R}^{2n}$ e S uma superfície de nível regular de H. Pelo teorema de Liouville, X_H preserva o volume em $\mathbb{R}^{2n}$. Isso implica que o campo $X_H \mid_S$ preserva o volume induzido em S? Justifique. (Dica: pense no caso n=1)

Pergunta 8. Considere o potencial uni-dimensional $U(x) = -x^2 + x^4$. Desenhe o retrato de fase desse sistema na região D correspondentes aos potenciais $U \leq 1$. O teorema de recorrência de Poincaré diz que em toda vizinhança V em D possui um ponto x que retorna à V. Utilize esse exemplo para discorrer o porquê de não valer que todos os pontos de V retornam a V.