Física 1 (4310145) - Centro de Massa e Momento Linear

Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear

9.1 O centro de massa

9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

9.3 Momento Linear

- Momento Linear de um sistema de partículas

9.4 Colisão e Impulso

9.5 Conservação do momento linear

9.6 Momento e energia cinética em colisões

9.7 Colisões elásticas em uma dimensão

9.8 Colisões em duas dimensões

9.9 Sistemas de Massa Variável

Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear

9.1 O centro de massa

9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

9.3 Momento Linear

- Momento Linear de um sistema de partículas

9.4 Colisão e Impulso

9.5 Conservação do momento linear

9.6 Momento e energia cinética em colisões

9.7 Colisões elásticas em uma dimensão

9.8 Colisões em duas dimensões

9.9 Sistemas de Massa Variável

Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear

9.1 O centro de massa

9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

9.3 Momento Linear

- Momento Linear de um sistema de partículas

9.4 Colisão e Impulso

9.5 Conservação do momento linear

9.6 Momento e energia cinética em colisões

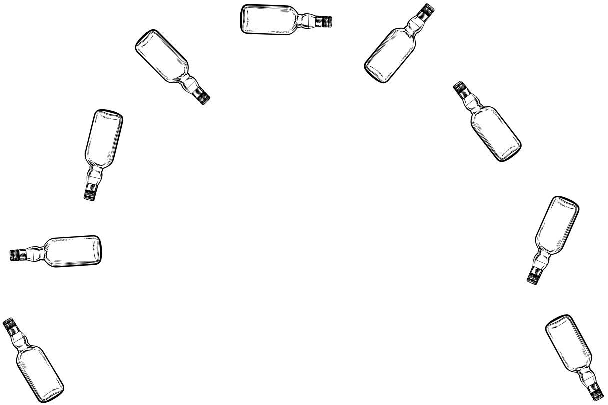
9.7 Colisões elásticas em uma dimensão

9.8 Colisões em duas dimensões

9.9 Sistemas de Massa Variável

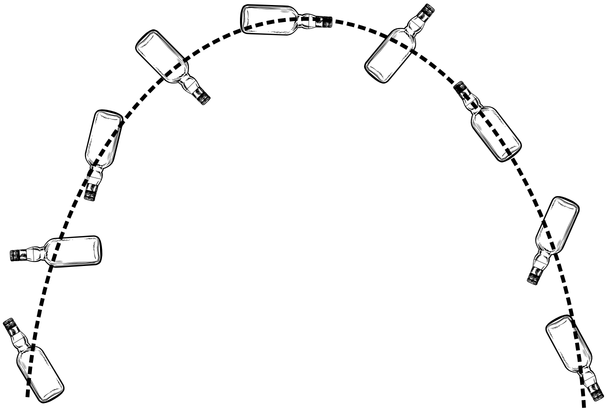
O centro de massa

- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



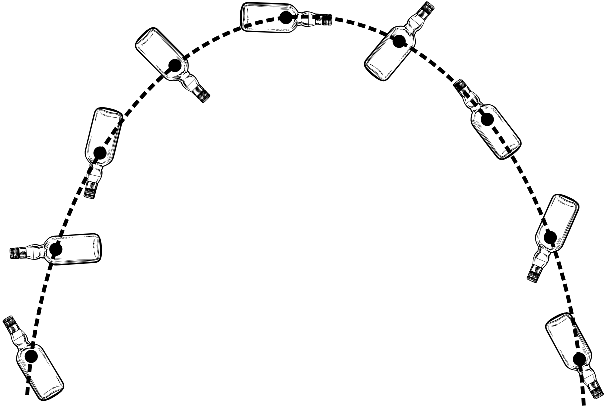
O centro de massa

- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



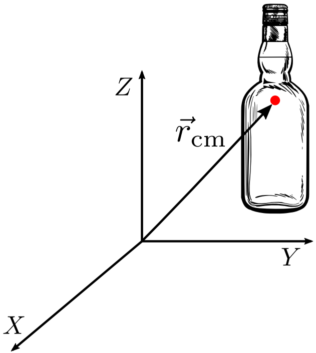
O centro de massa

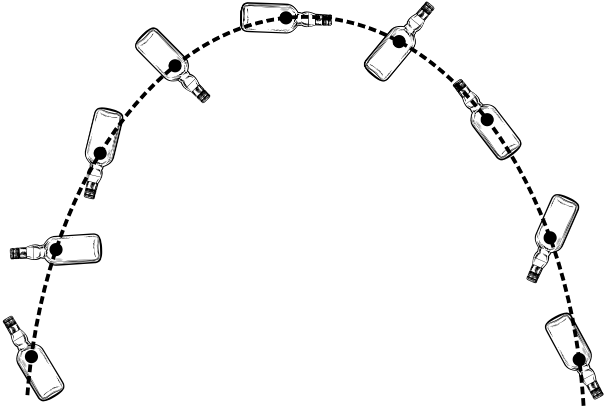
- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto



O centro de massa

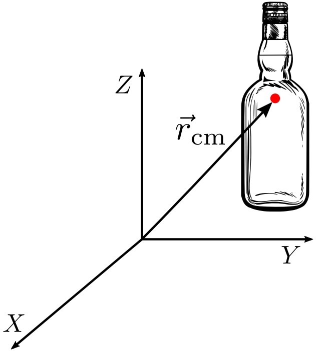
- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto

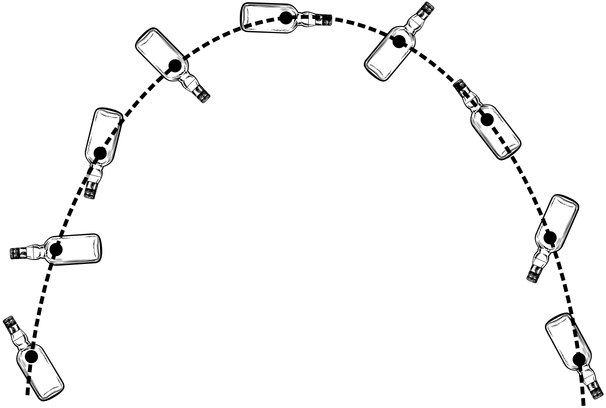




O centro de massa

- É o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto





O centro de massa

- Para o sistema de duas partículas mostrado na figura ao lado, a posição do centro de massa é dada por

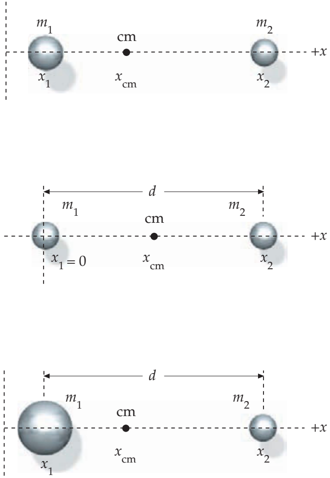
$$M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

em que $M = m_1 + m_2$

- Se escolhermos a origem convenientemente, obtemos

$$M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1(0) + m_2 d$$

$$x_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$



O centro de massa

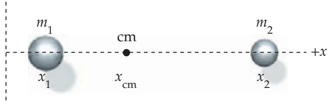
- Para o sistema de duas partículas mostrado na figura ao lado, a posição do centro de massa é dada por

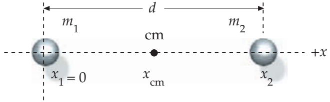
$$Mx_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

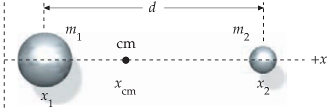
em que $M = m_1 + m_2$

- Se escolhermos a origem convenientemente, obtemos

$$Mx_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1(0) + m_2 d$$
$$x_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$







O centro de massa
Generalização

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

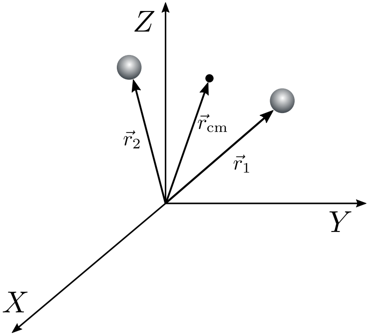
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i \qquad My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial



O centro de massa
Generalização

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

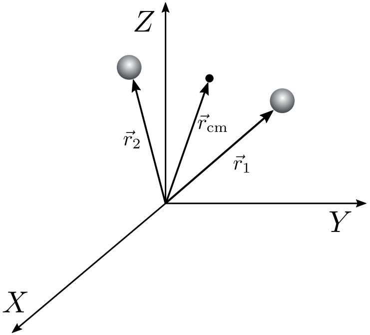
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i \qquad My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial



- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

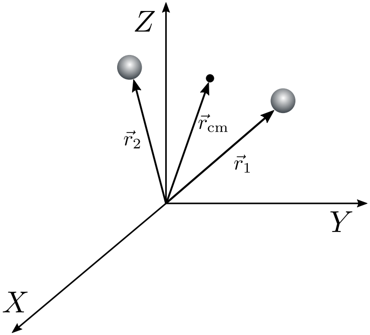
$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

- Em notação vetorial



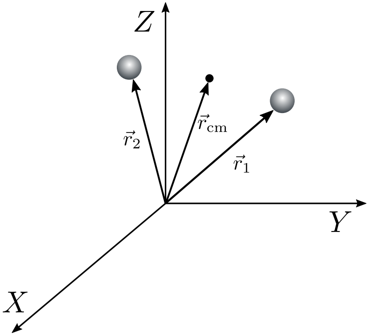
O centro de massa
Generalização

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas



$$M x_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad M y_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad M z_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

- Em notação vetorial

Centro de Massa

$$M\vec{r}_{\rm cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

O centro de massa
Generalização

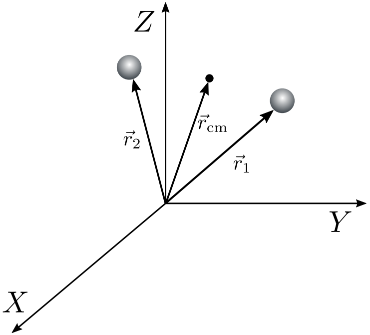
- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i \qquad My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$



- Em notação vetorial

Centro de Massa

$$M\vec{r}_{\mathrm{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

O centro de massa
Generalização

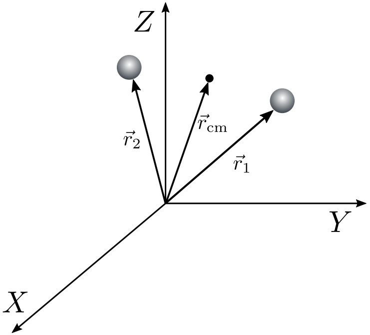
- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i \qquad My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$



- Em notação vetorial

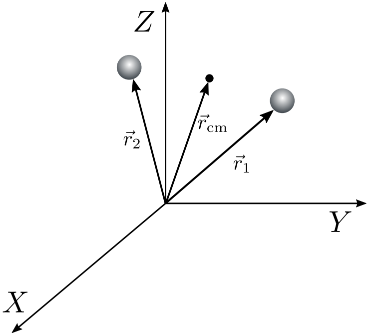
Centro de Massa

$$M\vec{r}_{\rm cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



- Aplicamos a mesma ideia para as outras coordenadas

$$Mx_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_ix_i \qquad My_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iy_i \qquad Mz_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_iz_i$$

- Em notação vetorial

Centro de Massa

$$M\vec{r}_{\text{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

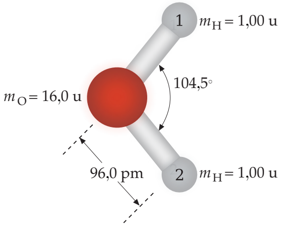
- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{m_{\mathrm{H1}}x_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}x_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}x_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} \\
&= \frac{(1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 6,53\mathrm{pm} \\
y_{cm} &= \frac{m_{\mathrm{H1}}y_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}y_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}y_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} \\
&= \frac{(1,00\mathrm{u})(75,9\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(-75,9\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 0,00\mathrm{pm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\mathrm{pm}\ \hat{\imath}}$$



Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

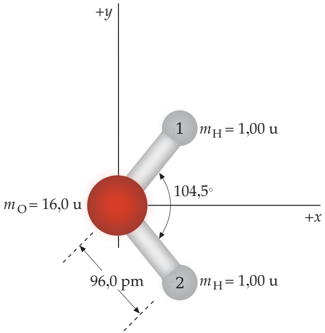
$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$= \frac{(1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 6,53\text{pm}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$= \frac{(1,00\text{u})(75,9\text{pm}) + (1,00\text{u})(-75,9\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 0,00\text{pm}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\text{pm}\ \hat{\imath}}$$



Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

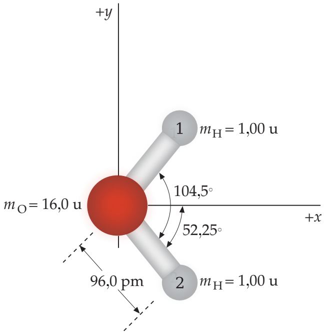
$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$= \frac{(1,00u)(58,8pm) + (1,00u)(58,8pm) + (16,0u)(0)}{1,00u + 1,00u + 16,0u} = 6,53pm$$

$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$= \frac{(1,00u)(75,9pm) + (1,00u)(-75,9pm) + (16,0u)(0)}{1,00u + 1,00u + 16,0u} = 0,00pm$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53pm\ \hat{\imath}}$$



Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

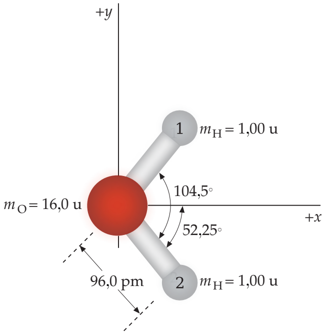
$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$= \frac{(1,00u)(58,8pm) + (1,00u)(58,8pm) + (16,0u)(0)}{1,00u + 1,00u + 16,0u} = 6,53pm$$

$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$= \frac{(1,00u)(75,9pm) + (1,00u)(-75,9pm) + (16,0u)(0)}{1,00u + 1,00u + 16,0u} = 0,00pm$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53pm\ \hat{\imath}}$$

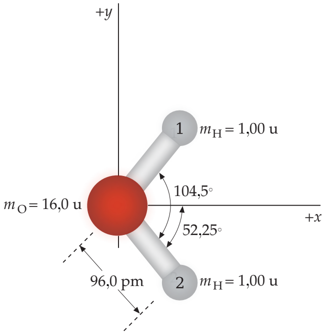


Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$



- Ficamos com

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O} \\ &= \frac{(1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 6,53\text{pm} \\ y_{cm} &= \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O} \\ &= \frac{(1,00\text{u})(75,9\text{pm}) + (1,00\text{u})(-75,9\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 0,00\text{pm} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\text{pm}\ \hat{\imath}}$$

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

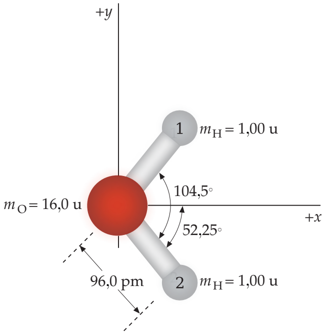
$$x_{cm} = \frac{m_{\mathrm{H1}}x_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}x_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}x_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}}$$

$$= \frac{(1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 6,53\mathrm{pm}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{\mathrm{H1}}y_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}y_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}y_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}}$$

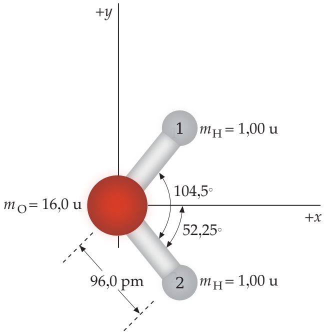
$$= \frac{(1,00\mathrm{u})(75,9\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(-75,9\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 0,00\mathrm{pm}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\mathrm{pm}\ \hat{\imath}}$$



- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$



- Ficamos com

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{m_{\mathrm{H1}}x_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}x_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}x_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} \\ &= \frac{(1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 6,53\mathrm{pm} \\ y_{cm} &= \frac{m_{\mathrm{H1}}y_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}y_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}y_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} \\ &= \frac{(1,00\mathrm{u})(75,9\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(-75,9\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 0,00\mathrm{pm} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\mathrm{pm}\ \hat{\imath}}$$

Encontre o centro de massa de uma molécula de água

- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

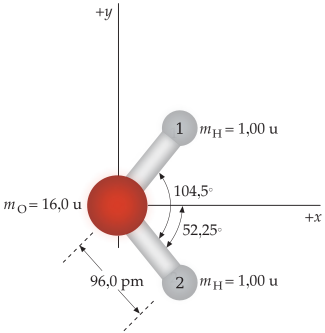
$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{m_{\mathrm{H1}}x_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}x_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}x_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} = \frac{(1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 6,53\mathrm{pm}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{\mathrm{H1}}y_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}y_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}y_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} = \frac{(1,00\mathrm{u})(75,9\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(-75,9\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 0,00\mathrm{pm}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\mathrm{pm}\ \hat{\imath}}$$



Exemplo: Centro de massa de uma molécula de água
Encontre o centro de massa de uma molécula de água

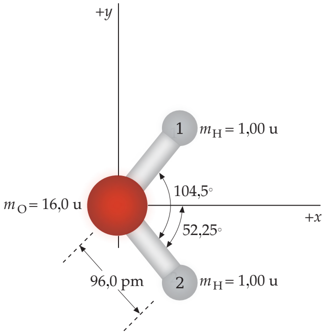
- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{m_{\mathrm{H1}}x_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}x_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}x_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} \\
&= \frac{(1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(58,8\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 6,53\mathrm{pm} \\
y_{cm} &= \frac{m_{\mathrm{H1}}y_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}}y_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}y_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{H1}} + m_{\mathrm{H2}} + m_{\mathrm{O}}} \\
&= \frac{(1,00\mathrm{u})(75,9\mathrm{pm}) + (1,00\mathrm{u})(-75,9\mathrm{pm}) + (16,0\mathrm{u})(0)}{1,00\mathrm{u} + 1,00\mathrm{u} + 16,0\mathrm{u}} = 0,00\mathrm{pm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\mathrm{pm}\ \hat{\imath}}$$



Encontre o centro de massa de uma molécula de água

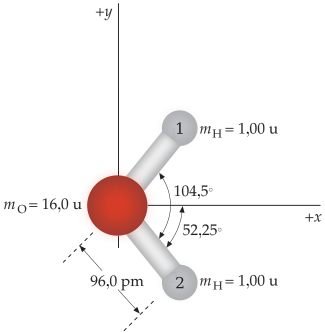
- Temos de calcular as coordenadas x_{cm} e y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{m_{\text{H1}}x_{\text{H1}} + m_{\text{H2}}x_{\text{H2}} + m_{\text{O}}x_{\text{O}}}{m_{\text{H1}} + m_{\text{H2}} + m_{\text{O}}}$$
$$= \frac{(1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (1,00\text{u})(58,8\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 6,53\text{pm}$$
$$y_{cm} = \frac{m_{\text{H1}}y_{\text{H1}} + m_{\text{H2}}y_{\text{H2}} + m_{\text{O}}y_{\text{O}}}{m_{\text{H1}} + m_{\text{H2}} + m_{\text{O}}}$$
$$= \frac{(1,00\text{u})(75,9\text{pm}) + (1,00\text{u})(-75,9\text{pm}) + (16,0\text{u})(0)}{1,00\text{u} + 1,00\text{u} + 16,0\text{u}} = 0,00\text{pm}$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = 6,53\text{pm}\ \hat{\imath}}$$



Corpos maciços

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

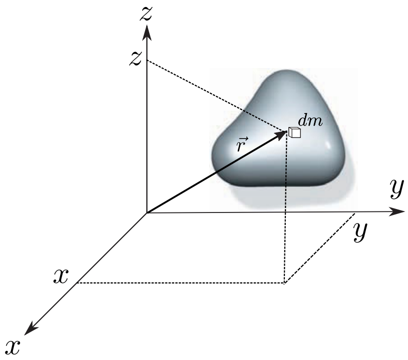
- As outras coordenadas são

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \implies x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \implies y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \implies z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



Centro de Massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \implies \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Corpos maciços

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

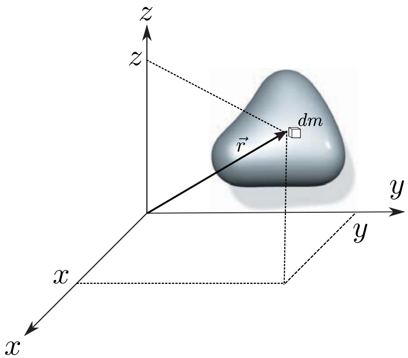
- As outras coordenadas são

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \implies x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \implies y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \implies z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



Centro de Massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \implies \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Corpos maciços

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

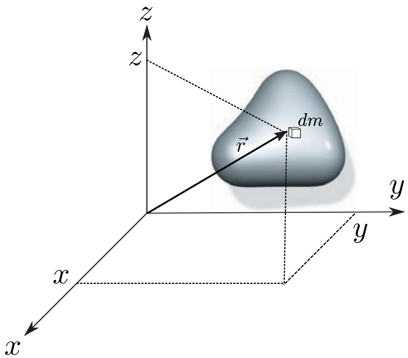
- As outras coordenadas são

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \implies x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \implies y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \implies z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



Centro de Massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \implies \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Corpos maciços

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

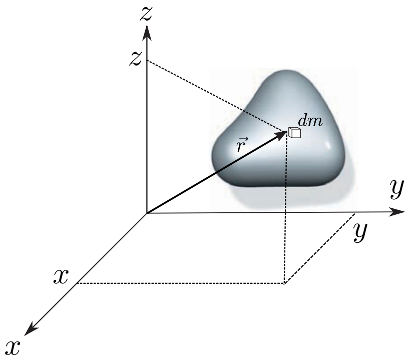
- As outras coordenadas são

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \implies x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \implies y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \implies z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



Centro de Massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \implies \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Corpos maciços

- Para um sistema de N partículas em 3 dimensões, temos

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{\imath} + y_{cm}\hat{\jmath} + z_{cm}\hat{k}$$

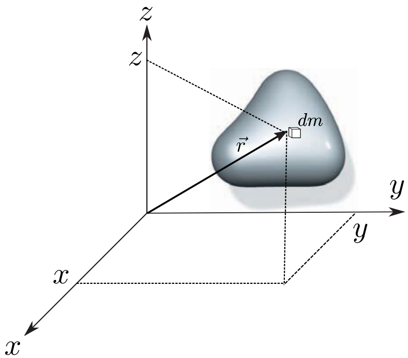
- As outras coordenadas são

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \implies x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \implies y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \implies z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

em que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



Centro de Massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \implies \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

- Centro de massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

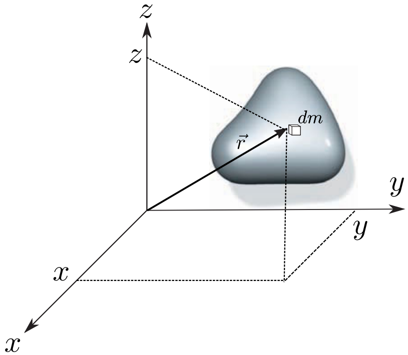
$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

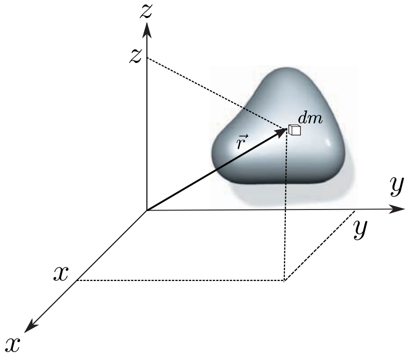
- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV}$$



- Centro de massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$



- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

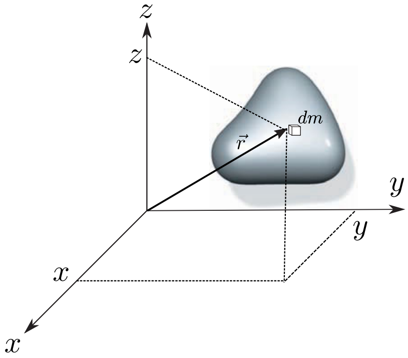
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV}$$

- Centro de massa

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$



- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV}$$

- Centro de massa

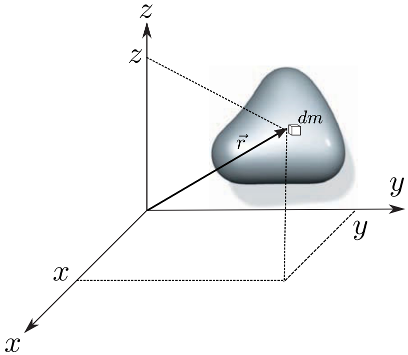
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$



- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV}$$

- Centro de massa

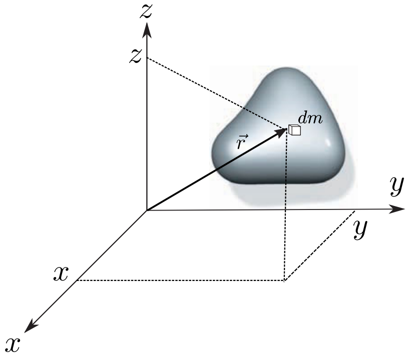
$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

- Podemos escrever a densidade como

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad \Longrightarrow \qquad dm = \rho\, dV$$

- Dessa forma, podemos escrever

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$



- Se a densidade é constante ($\rho = M/V$), temos

$$\boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int x\, dV, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int y\, dV, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{1}{V}\int z\, dV}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \implies x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \implies y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \implies \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\,ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\,ds$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$

Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$

- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}}$$

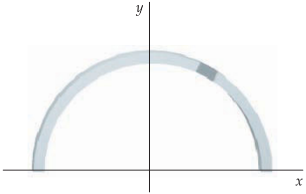
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad\Longrightarrow\quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\,ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad\Longrightarrow\quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\,ds$$



- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$

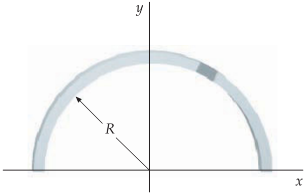
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \implies x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \implies y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$



- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \implies \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}}$$

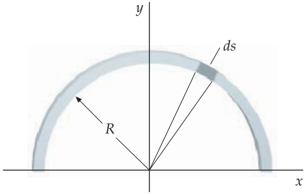
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$



- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}}$$

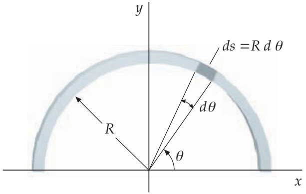
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \implies x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \implies y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$



- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \implies \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{j}}$$

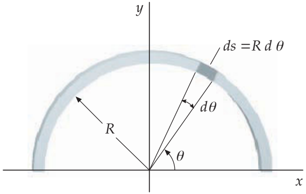
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\ dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\ ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\ dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\ ds$$

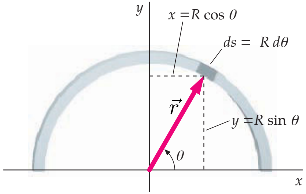


- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\ d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$



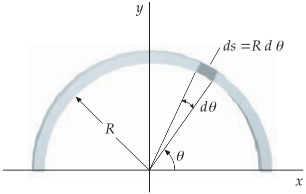
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\ dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\ ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\ dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\ ds$$

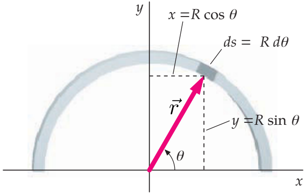


- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\ d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$



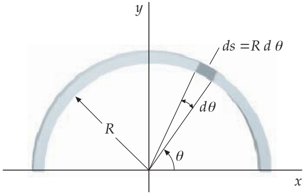
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$

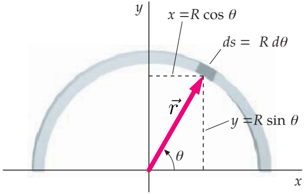


- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$



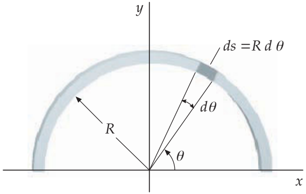
Exemplo: Centro de massa do semi-aro

Encontre o centro do semi aro mostrado. Ele tem raio R, massa M e densidade $\lambda = \frac{dm}{ds}$ constante.

- Podemos usar as relações

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad \Longrightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int x\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \Longrightarrow \quad y_{cm} = \frac{\lambda}{M}\int y\, ds$$

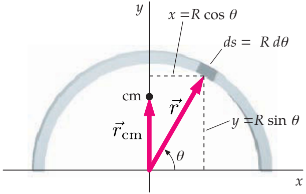


- Ficamos com

$$x_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \qquad y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

- Finalmente

$$x_{cm} = 0 \qquad y_{cm} = 2\frac{\lambda R^2}{M} = 2\frac{M}{\pi R}\frac{R^2}{M} = \frac{2R}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{2R}{\pi}\hat{\jmath}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

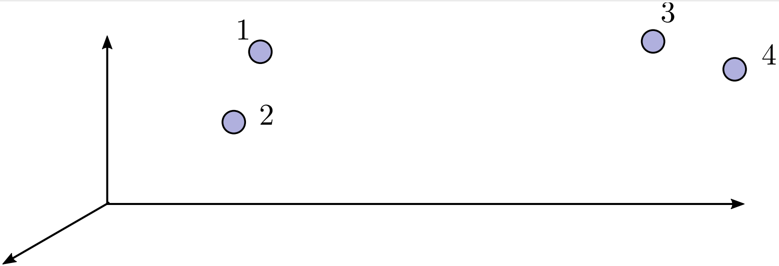
Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

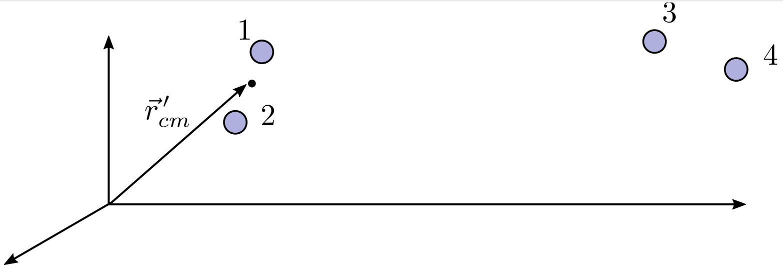


$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

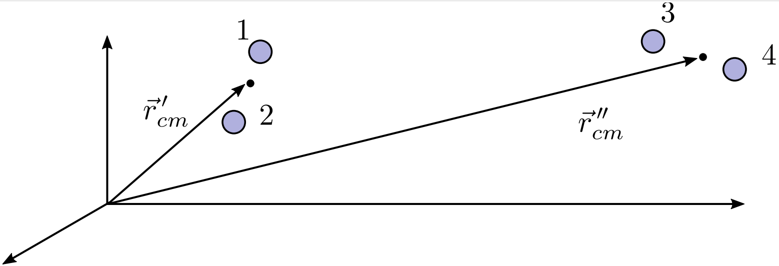


$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

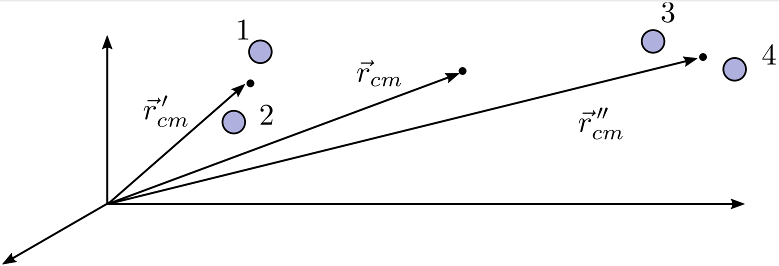


$$\vec{r}\,'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}\,''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}\,'_{cm} + M''\vec{r}\,''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

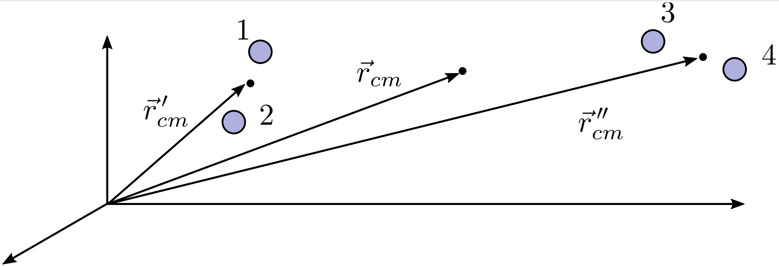


$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

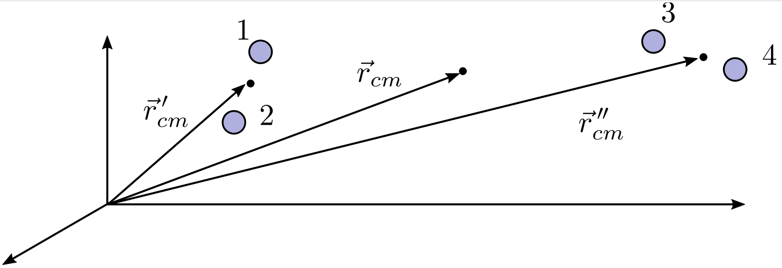


$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

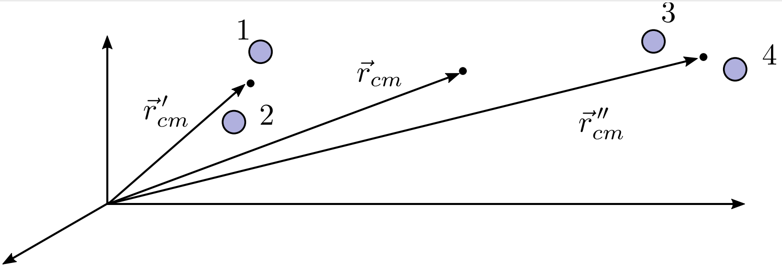


$$\vec{r}\,'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}\,''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}\,'_{cm} + M''\vec{r}\,''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

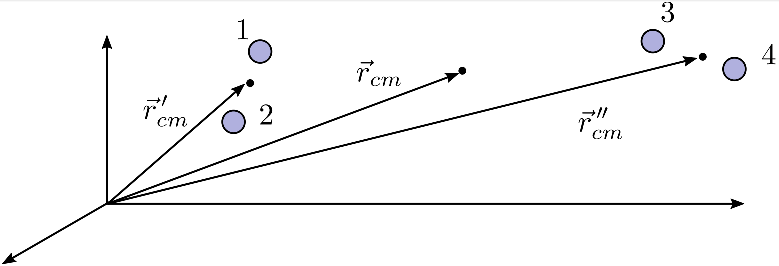


$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

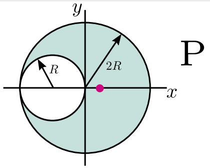


$$\vec{r}'_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M'} \qquad \vec{r}''_{cm} = \frac{m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M''}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M'\vec{r}'_{cm} + M''\vec{r}''_{cm}}{M' + M''} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.



- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \implies \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$

Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

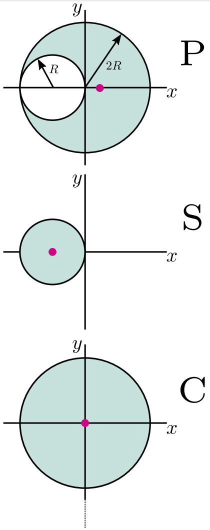
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

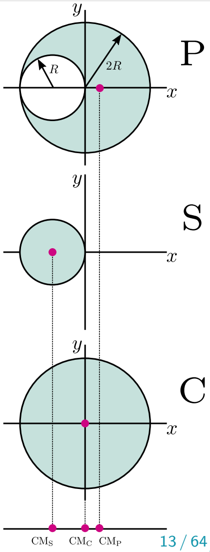
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

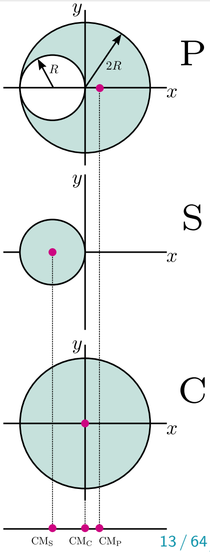
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

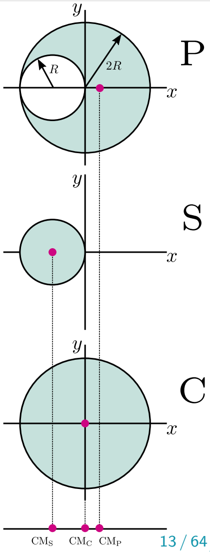
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

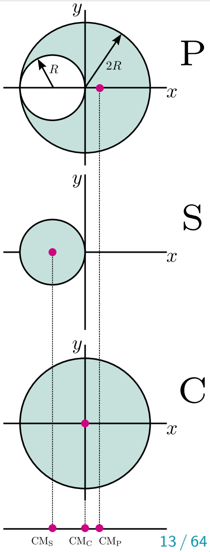
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

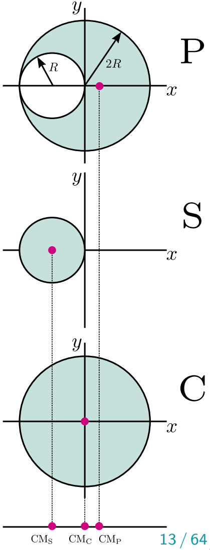
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Exemplo: Centro de uma placa vazada

Considere uma placa de meta, fina e homogênea P, de raio $2R$, da qual um disco de raio R foi removido, como mostrado na Fig. Determine o CM da placa.

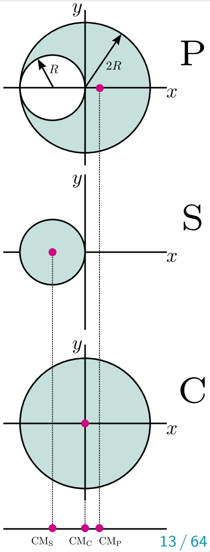
- O CM do disco S está em $x_S = -R$
- O CM do disco C está em $x_C = 0$
- Suponha que o CM da placa P está em um ponto x_P.
- Podemos escrever

$$x_{S+P} = x_C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} = 0$$

$$x_P = -\frac{m_S}{m_P} x_S = \frac{m_S}{m_P} R$$

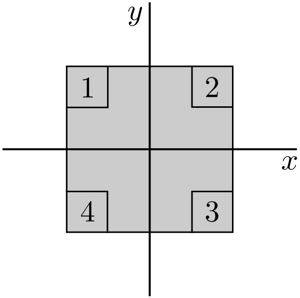
- usando $m_s/m_p = 1/3$, obtemos

$$\boxed{x_P = \frac{R}{3}}$$



Teste

A figura mostra uma placa quadrada uniforme, da qual quatro partes quadradas iguais são removidas progressivamente dos cantos. (a) Qual é a localização do centro de massa da placa original? Qual é a localização do centro de massa após a remoção (b) da parte 1; (c) das partes 1 e 2; (d) das partes 1 e 3; (e) das partes 1, 2 e 3; (f) das quatro partes? Responda em termos dos quadrantes, eixos ou pontos (sem realizar nenhum cálculo).



Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear

9.1 O centro de massa

9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

9.3 Momento Linear

- Momento Linear de um sistema de partículas

9.4 Colisão e Impulso

9.5 Conservação do momento linear

9.6 Momento e energia cinética em colisões

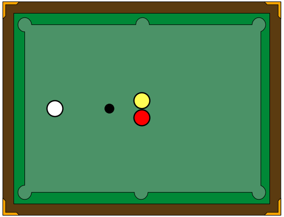
9.7 Colisões elásticas em uma dimensão

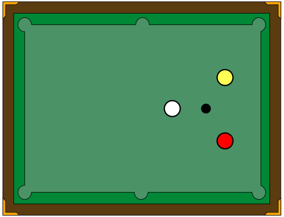
9.8 Colisões em duas dimensões

9.9 Sistemas de Massa Variável

A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

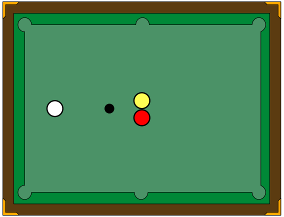
- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

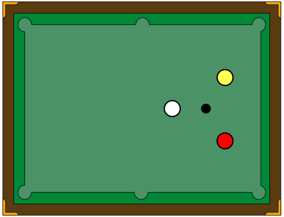




A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

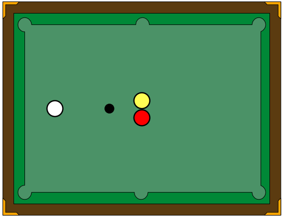
- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

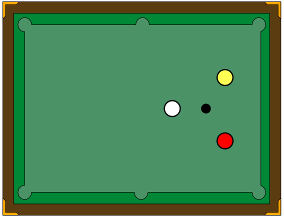




A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

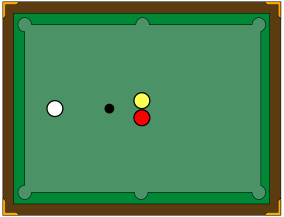
- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

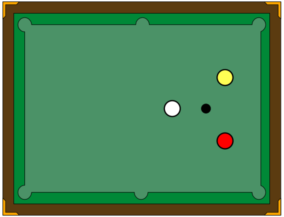




A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

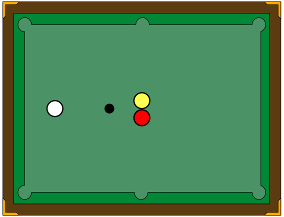


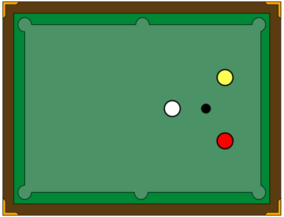


A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$

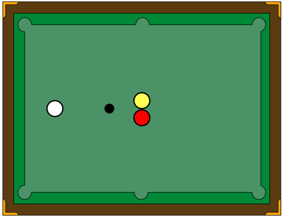


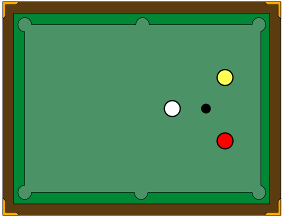


A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$



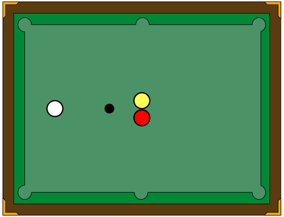


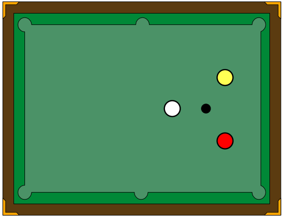
A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Embora o centro de massa seja apenas um ponto, ele se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema
- Podemos atribuir-lhe uma posição, uma velocidade e uma aceleração.
- A equação que descreve o movimento do CM de um sistema de partículas é

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$

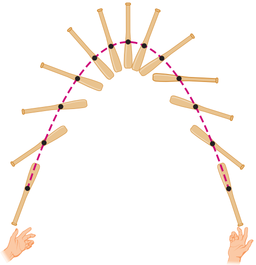
- Na equação acima
  - $\vec{F}_{\text{ext}}$: Resultante de todas as forças externas que agem sobre o sistema
  - M: massa total do sistema
  - $\vec{a}_{\text{cm}}$: aceleração do CM do sistema.



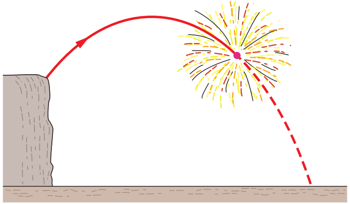


A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Corpo maciço: no exemplo, M é a massa do bastão, e $\vec{F}_{\text{ext}}$ é a força gravitacional



- Explosões: O CM dos fragmentos segue a mesma trajetória parabólica que o foguete teria seguido se não tivesse explodido. As forças internas da explosão não mudam a trajetória do CM.



Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Para um sistema de n partículas, escrevemos

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- $\vec{F}_i \rightarrow$ força resultante que atua na $i-$ésima partícula

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- Para um sistema de n partículas, escrevemos

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- $\vec{F}_i \rightarrow$ força resultante que atua na i–ésima partícula

- Para um sistema de n partículas, escrevemos

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- $\vec{F}_i \rightarrow$ força resultante que atua na $i-$ésima partícula

- Para um sistema de n partículas, escrevemos

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- $\vec{F}_i \rightarrow$ força resultante que atua na $i-$ésima partícula

- Para um sistema de n partículas, escrevemos

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Derivando a eq. anterior, obtemos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- $\vec{F}_i \rightarrow$ força resultante que atua na $i-$ésima partícula

- Considere por exemplo $\vec{F}_1$ (a força resultante na partícula 1)

$$\vec{F}_1 = \underbrace{\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \cdots + \vec{F}_{1,n}}_{\text{forças internas}} + \underbrace{\vec{F}_{1,\text{ext}}}_{\text{forças externas}}$$

- Para a partícula 2, teríamos

$$\vec{F}_2 = \underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{2,4} + \cdots + \vec{F}_{2,n}}_{\text{forças internas}} + \underbrace{\vec{F}_{2,\text{ext}}}_{\text{forças externas}}$$

- Para a i-ésimas partícula

$$\vec{F}_i = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} \right) + \vec{F}_{i,\text{ext}}$$

- Considere por exemplo $\vec{F}_1$ (a força resultante na partícula 1)

$$\vec{F}_1 = \underbrace{\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \cdots + \vec{F}_{1,n}}_{\text{forças internas}} + \underbrace{\vec{F}_{1,\text{ext}}}_{\text{forças externas}}$$

- Para a partícula 2, teríamos

$$\vec{F}_2 = \underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{2,4} + \cdots + \vec{F}_{2,n}}_{\text{forças internas}} + \underbrace{\vec{F}_{2,\text{ext}}}_{\text{forças externas}}$$

- Para a i-ésimas partícula

$$\vec{F}_i = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} \right) + \vec{F}_{i,\text{ext}}$$

- Considere por exemplo $\vec{F}_1$ (a força resultante na partícula 1)

$$\vec{F}_1 = \underbrace{\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \cdots + \vec{F}_{1,n}}_{\text{forças internas}} + \underbrace{\vec{F}_{1,\text{ext}}}_{\text{forças externas}}$$

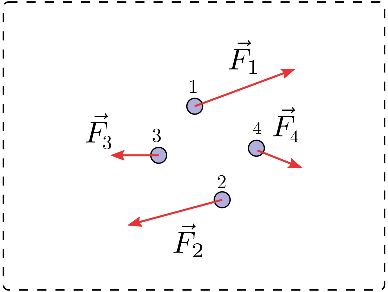
- Para a partícula 2, teríamos

$$\vec{F}_2 = \underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{2,4} + \cdots + \vec{F}_{2,n}}_{\text{forças internas}} + \underbrace{\vec{F}_{2,\text{ext}}}_{\text{forças externas}}$$

- Para a i-ésimas partícula

$$\vec{F}_i = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} \right) + \vec{F}_{i,\text{ext}}$$

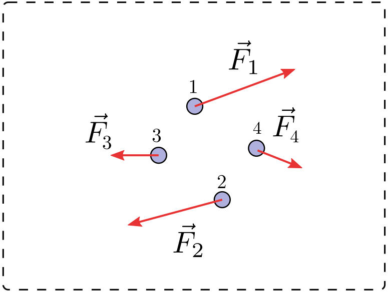
- As forças internas formam pares do tipo ação-reação

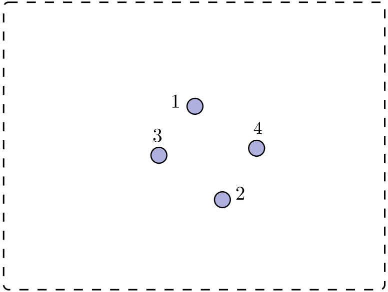


- Da terceira lei de Newton temos

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_{2,1} &= -\vec{F}_{1,2} \\ \vec{F}_{3,1} &= -\vec{F}_{1,3} \\ & \vdots \end{cases}$$

- As forças internas formam pares do tipo ação-reação





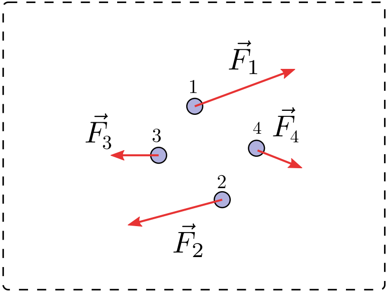
- Da terceira lei de Newton temos

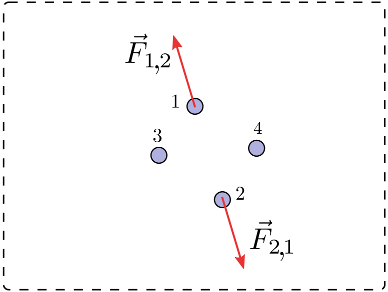
$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \\ \vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{1,3} \\ \vdots \end{cases}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- As forças internas formam pares do tipo ação-reação





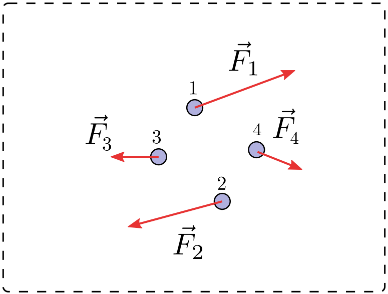
- Da terceira lei de Newton temos

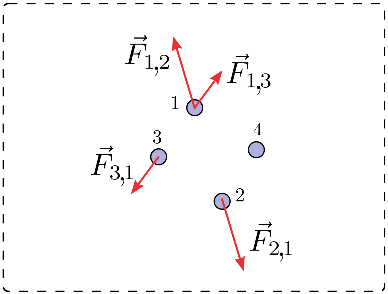
$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \\ \vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{1,3} \\ \vdots \end{cases}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

- As forças internas formam pares do tipo ação-reação

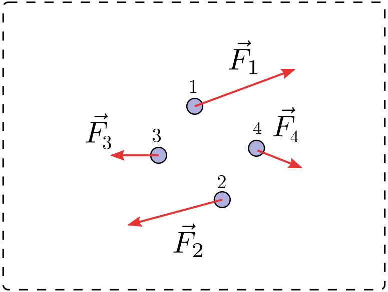


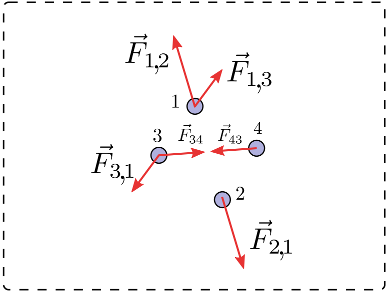


- Da terceira lei de Newton temos

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \\ \vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{1,3} \\ \vdots \end{cases}$$

- As forças internas formam pares do tipo ação-reação

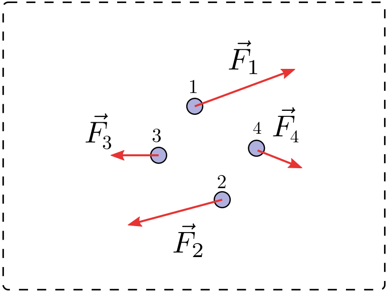


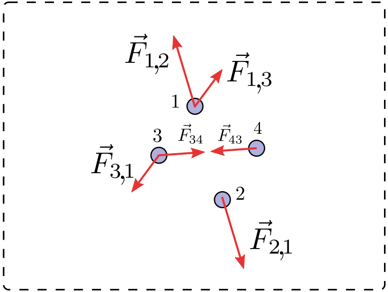


- Da terceira lei de Newton temos

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \\ \vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{1,3} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

- As forças internas formam pares do tipo ação-reação





- Da terceira lei de Newton temos

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \implies \begin{cases} \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \\ \vec{F}_{3,1} = -\vec{F}_{1,3} \\ \vdots \end{cases}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots$$
$$+ (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots$$
$$+ (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = {} & (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
& + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\cancel{\vec{F}_{1,2}} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\cancel{\vec{F}_{1,2}} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,2}} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,2}} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (-\vec{F}_{1,3} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,2}} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,3}} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{2,3}} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,3}} - \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \cdots \\
&\quad + (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

Demonstração da equação: $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$

- Do slide 18/64, temos

$$M\vec{a}_{cm} = \underbrace{m_1\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m_2\vec{a}_2}_{\vec{F}_2} + \cdots + \underbrace{m_n\vec{a}_n}_{\vec{F}_n} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

- Porém

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + \vec{F}_{1,\text{ext}} \\
\vec{F}_2 &= (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + \vec{F}_{2,\text{ext}} \\
\vec{F}_3 &= (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \vec{F}_{3,\text{ext}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Note que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \cdots) + (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \cdots) + (\vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \cdots) + \cdots \\
&+ (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}}) \\
\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n &= (\cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{2,3}} + \cdots) + (\cancel{-\vec{F}_{1,3}} \cancel{-\vec{F}_{2,3}} + \cdots) + \cdots \\
&+ (\vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}})
\end{aligned}$$

- Temos portanto

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \vec{F}_{1,\text{ext}} + \vec{F}_{2,\text{ext}} + \cdots + \vec{F}_{n,\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

ou seja, podemos escrever

Segunda lei de Newton para um sistema de partículas

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$

Teste

Dois patinadores em uma superfície de gelo, sem atrito, seguram as extremidades de uma vara, de massa desprezível. É escolhido um eixo de referência na mesma posição que a vara, com a origem no centro de massa do sistema de dois patinadores. Um patinador, João, pesa duas vezes mais do que o outro patinador, Eduardo. Onde os patinadores se encontram se

(a) João puxa a vara para se aproximar de Eduardo?
(b) Eduardo puxa a vara para se aproximar de João?
(c) os dois patinadores puxam a vara?

Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear
   - 9.1 O centro de massa
   - 9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas
   - 9.3 Momento Linear
     - Momento Linear de um sistema de partículas
   - 9.4 Colisão e Impulso
   - 9.5 Conservação do momento linear
   - 9.6 Momento e energia cinética em colisões
   - 9.7 Colisões elásticas em uma dimensão
   - 9.8 Colisões em duas dimensões
   - 9.9 Sistemas de Massa Variável

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad\qquad (\text{unidade SI: kg} \cdot \text{m/s})$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \implies \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \implies \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante
- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante

- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento Linear

- Vamos definir o momento linear

Momento linear de uma partícula (Quantidade de movimento de uma partícula)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(unidade SI: kg} \cdot \text{m/s)}$$

- Derivando o momento linear, podemos escrever

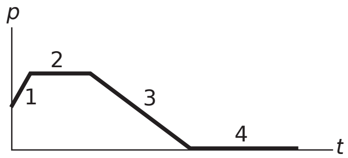
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}$ é constante
- As relações abaixo são equivalentes:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teste

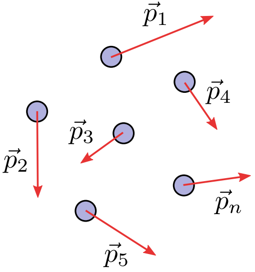
A figura mostra o módulo $p = |\vec{p}|$ do momento linear em função do tempo t para uma partícula que se move ao longo de um eixo. Uma força dirigida ao longo do eixo age sobre a partícula. (a) Ordene as quatro regiões indicadas de acordo com o módulo da força, do maior para o menor. (b) Em que região a velocidade da partícula está diminuindo?



Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

Momento linear de um sistema de partículas

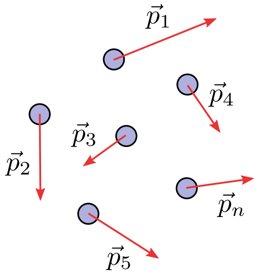
$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

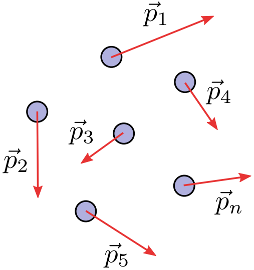
Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

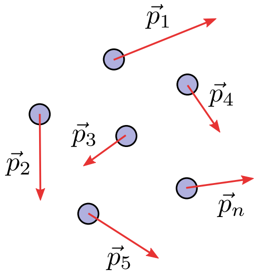
- Portanto, podemos escrever

Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

Momento linear de um sistema de partículas

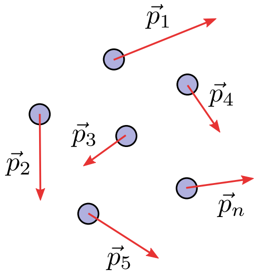
$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

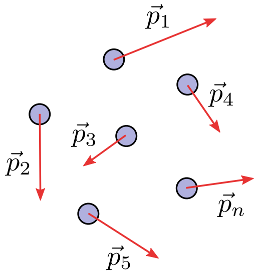
Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

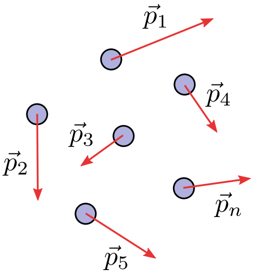
Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

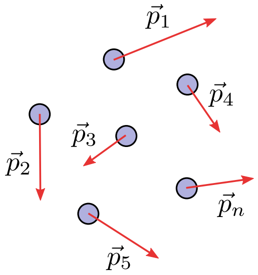
Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

- Podemos estender a definição de momento linear para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$



- Já vimos anteriormente que

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n$$
$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n$$

- Portanto, podemos escrever

Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos

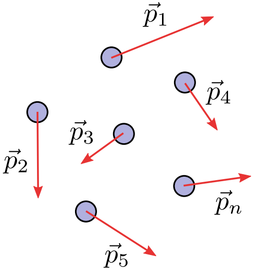
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

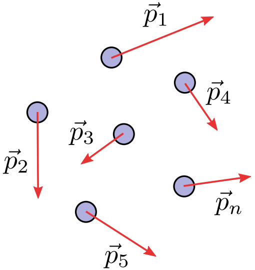
$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$



- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos

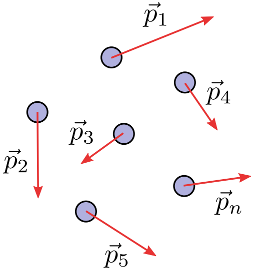
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$



Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos

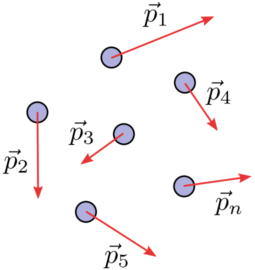
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$



Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos

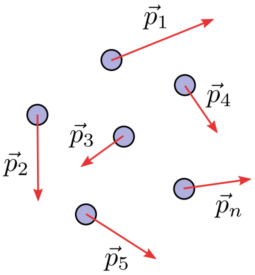
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$



Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos

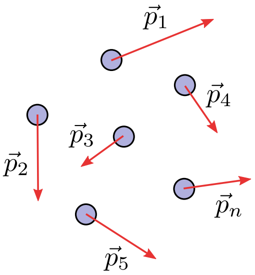
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

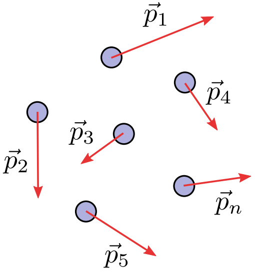


Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

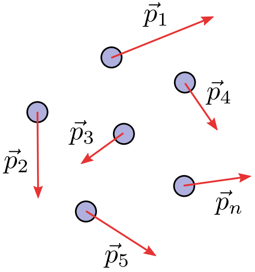
$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

- Momento linear de um sistema de partículas

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

- Derivando a Eq. acima, obtemos

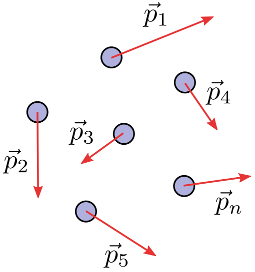
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n\right] = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_3 = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$



Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear
    9.1 O centro de massa
    9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas
    9.3 Momento Linear
        - Momento Linear de um sistema de partículas
    9.4 Colisão e Impulso
    9.5 Conservação do momento linear
    9.6 Momento e energia cinética em colisões
    9.7 Colisões elásticas em uma dimensão
    9.8 Colisões em duas dimensões
    9.9 Sistemas de Massa Variável

- Em uma colisão
  - a força é de curta duração
  - a força tem um módulo elevado
  - provoca uma mudança brusca no momento do corpo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}dt = \frac{d\vec{p}}{dt}dt \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}dt$$

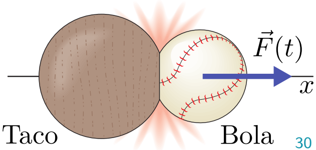
$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \quad \Longrightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

Impulso

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

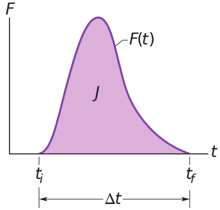
Teorema Impulso-momento

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$



- Se conhecermos $\vec{F}(t)$, podemos calcular

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$
$$= \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)\, dt\, \hat{\imath} + \int_{t_i}^{t_f} F_y(t)\, dt\, \hat{\jmath} + \int_{t_i}^{t_f} F_z(t)\, dt\, \hat{k}$$

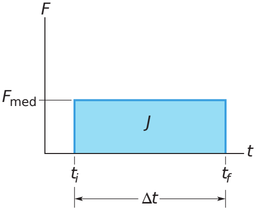


- Muitas vezes não conhecemos $\vec{F}(t)$, mas conhecemos seu valor médio $\vec{F}_{\text{med}}$

$$\vec{F}_{\text{med}}\, \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

- Assim, temos

$$\boxed{\vec{J} = \vec{F}_{\text{med}}\, \Delta t}$$



Teste

Um paraquedista, cujo paraquedas não abriu, cai em um monte de neve e sofre ferimentos leves. Se caísse em um terreno sem neve, o tempo necessário para parar teria sido 10 vezes menor e a colisão seria fatal. A presença da neve aumenta, diminui ou mantém inalterado o valor (a) da variação do momento do paraquedista, (b) do impulso experimentado pelo paraquedista e (c) da força experimentada pelo paraquedista?

- Suponha que n projéteis colidem em um intervalo Δt
- Suponha que cada projétil tem momento inicial $\vec{p}_i$ e sofre uma variação de momento igual $\Delta\vec{p}$ por causa da colisão
- A variação total de momento linear de n projéteis durante o intervalo de tempo Δt é

$$n\Delta\vec{p}$$

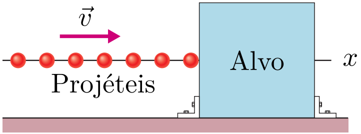
- O impulso a que o alvo é submetido em um intervalo de tempo Δt é

$$\vec{J} = -n\Delta\vec{p}$$

- Podemos calcular a força média que age no alvo durante as colisões

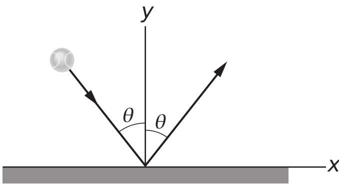
$$\vec{F}_{\text{med}}\Delta t = -n\Delta\vec{p}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{med}} = -n\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}$$



Teste

A figura mostra uma vista superior de uma bola ricocheteando em uma parede vertical sem que a velocidade escalar da bola seja afetada. Considere a variação $\Delta\vec{p}$ do momento linear da bola. (a) Δp_x é positiva, negativa ou nula? (b) Δp_y é positiva, negativa ou nula? (c) Qual é a orientação de $\Delta\vec{p}$?



Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear
9.1 O centro de massa
9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas
9.3 Momento Linear
- Momento Linear de um sistema de partículas
9.4 Colisão e Impulso
9.5 Conservação do momento linear
9.6 Momento e energia cinética em colisões
9.7 Colisões elásticas em uma dimensão
9.8 Colisões em duas dimensões
9.9 Sistemas de Massa Variável

Conservação do momento linear

Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \qquad \vec{P} = \begin{cases} \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_n \\ M\vec{v}_{cm} \end{cases}$$

- Se a força externa $\vec{F}_{\text{res}}$ é zero, temos que

Para um sistema fechado e isolado

$$\vec{P} = \text{constante} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Também podemos analisar em termos das componentes

$$\vec{F}_{x,\text{res}}\hat{\imath} + \vec{F}_{y,\text{res}}\hat{\jmath} + \vec{F}_{z,\text{res}}\hat{k} = \dot{P}_x\hat{\imath} + \dot{P}_y\hat{\jmath} + \dot{P}_z\hat{k}$$

Não confunda conservação do momento com conservação de energia

Teste

Um artefato inicialmente em repouso em um piso sem atrito explode em dois pedaços, que deslizam pelo piso após a explosão. Um dos pedaços desliza no sentido positivo de um eixo x. (a) Qual é a soma dos momentos dos dois pedaços após a explosão? (b) O segundo pedaço pode se mover em uma direção diferente da do eixo x? (c) Qual é a orientação do momento do segundo pedaço?

Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100$km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = M v_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

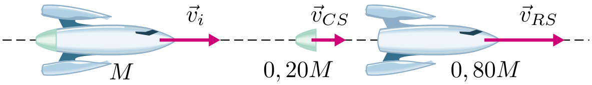
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100$km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = Mv_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

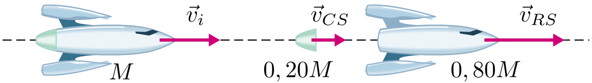
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100\text{km/h}$ em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = Mv_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

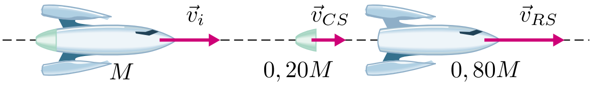
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100$km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = Mv_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

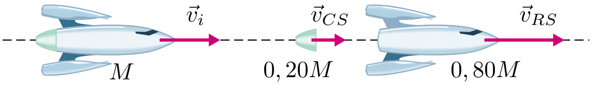
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100$km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = M v_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

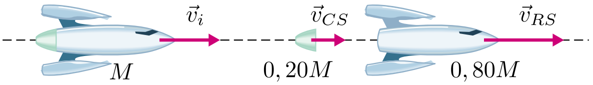
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100$km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = M v_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

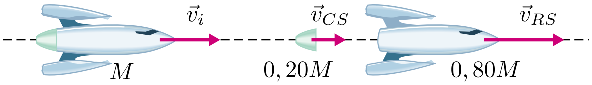
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: rebocador espacial

Um rebocador espacial e uma cápsula de carga, de massa total M, viajando com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = 2100$km/h em relação ao Sol. Com uma pequena explosão, o rebocador ejeta a cápsula de carga. Depois disso, o rebocador passa a viajar 500km/h mais depressa que a cápsula. Qual é a nova velocidade $\vec{v}_{RS}$ do rebocador com relação ao Sol?

- O sistema rebocador-cápsula é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Estamos interessados apenas na componente x, assim

$$P_i = Mv_i$$

- O momento do sistema após a ejeção é

$$P_f = (0,20M)v_{CS} + (0,80M)v_{RS}$$

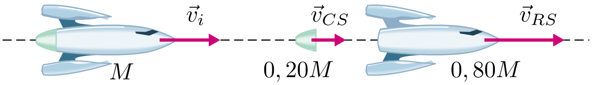
- Sabemos ainda que

$$v_{RS} = 500\text{km/h} + v_{CS}$$

- ou ainda

$$P_f = (0,20M)(v_{RS} - 500\text{km/h}) + (0,80M)v_{RS}$$

- Obtemos $\boxed{v_{RS} = 2200\text{km/h}}$



Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente y

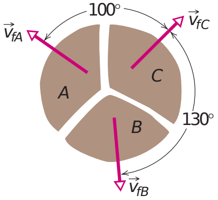
$$p_{fA,y} = 0$$
$$p_{fB,y} = -v_{fB}\sin(50°)(0,20M)$$
$$p_{fC,y} = +v_{fC}\sin(80°)(0,30M)$$

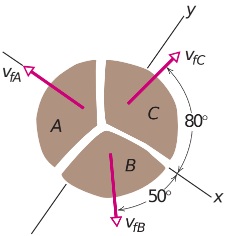
- Ficamos com

$$P_{i,y} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}$$
$$0 = -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) + v_{fC}\sin(80°)(0,30M)$$

- e assim

$$\boxed{v_{fB} = 9,64\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente y

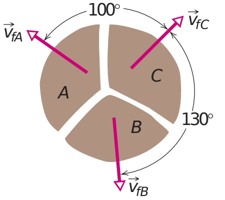
$$p_{fA,y} = 0$$
$$p_{fB,y} = -v_{fB}\sin(50°)(0,20M)$$
$$p_{fC,y} = +v_{fC}\sin(80°)(0,30M)$$

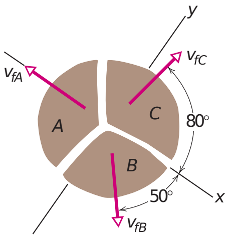
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,y} &= p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y} \\ 0 &= -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\sin(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fB} = 9,64\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente y

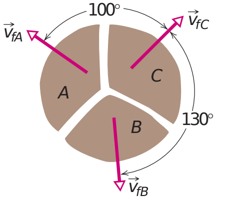
$$p_{fA,y} = 0$$
$$p_{fB,y} = -v_{fB}\sin(50°)(0,20M)$$
$$p_{fC,y} = +v_{fC}\sin(80°)(0,30M)$$

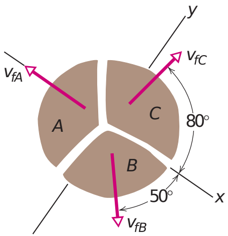
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,y} &= p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y} \\ 0 &= -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\sin(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fB} = 9,64\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente y

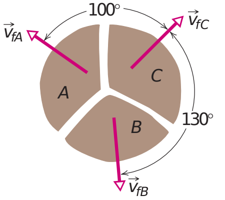
$$\begin{aligned} p_{fA,y} &= 0 \\ p_{fB,y} &= -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) \\ p_{fC,y} &= +v_{fC}\sin(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

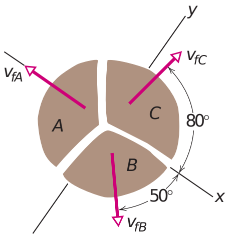
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,y} &= p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y} \\ 0 &= -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\sin(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fB} = 9,64\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente y

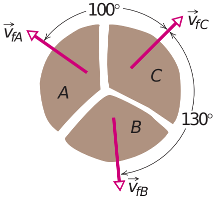
$$p_{fA,y} = 0$$
$$p_{fB,y} = -v_{fB}\sin(50°)(0,20M)$$
$$p_{fC,y} = +v_{fC}\sin(80°)(0,30M)$$

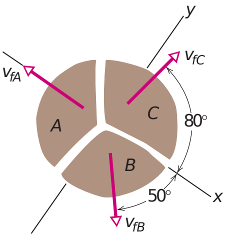
- Ficamos com

$$P_{i,y} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}$$
$$0 = -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) + v_{fC}\sin(80°)(0,30M)$$

- e assim

$$\boxed{v_{fB} = 9,64\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente y

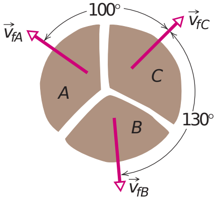
$$\begin{aligned} p_{fA,y} &= 0 \\ p_{fB,y} &= -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) \\ p_{fC,y} &= +v_{fC}\sin(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

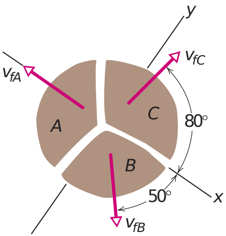
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,y} &= p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y} \\ 0 &= -v_{fB}\sin(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\sin(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fB} = 9,64\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente x

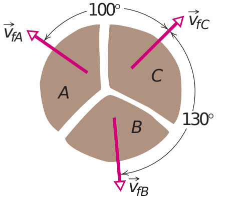
$$p_{fA,x} = -v_{fA}(0,50M)$$
$$p_{fB,x} = +v_{fB}\cos(50°)(0,20M)$$
$$p_{fC,x} = +v_{fC}\cos(80°)(0,30M)$$

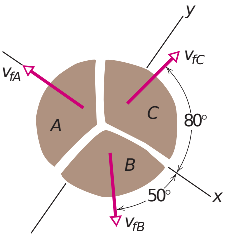
- Ficamos com

$$P_{i,x} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}$$
$$0 = -v_{fA}(0,50M) + v_{fB}\cos(50°)(0,20M) + v_{fC}\cos(80°)(0,30M)$$

- e assim

$$\boxed{v_{fA} = 3,00\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente x

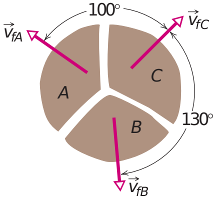
$$p_{fA,x} = -v_{fA}(0,50M)$$
$$p_{fB,x} = +v_{fB}\cos(50°)(0,20M)$$
$$p_{fC,x} = +v_{fC}\cos(80°)(0,30M)$$

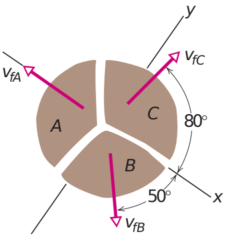
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,x} &= p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x} \\ 0 &= -v_{fA}(0,50M) \\ &\quad + v_{fB}\cos(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\cos(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fA} = 3,00\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente x

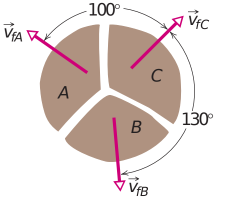
$$\begin{aligned} p_{fA,x} &= -v_{fA}(0,50M) \\ p_{fB,x} &= +v_{fB}\cos(50°)(0,20M) \\ p_{fC,x} &= +v_{fC}\cos(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

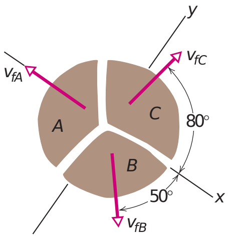
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,x} &= p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x} \\ 0 &= -v_{fA}(0,50M) \\ &\quad + v_{fB}\cos(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\cos(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fA} = 3,00\text{m/s}}$$





Exemplo: explosão bidimensional

Ao explodir, uma bomba colocada dentro de um coco vazio de massa M, quebra o coco em três pedaços, que deslizam em uma superfície. O pedaço C (massa $0,30M$) tem velocidade escalar final $v_{fC} = 5,0\text{m/s}$. (a) Qual é a velocidade do pedaço B $(0,20M)$? (b) Qual é a velocidade do pedaço A $(0,50M)$?

- O sistema é fechado e isolado, temos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

- Podemos escrever

$$P_{i,x} = P_{f,x} \qquad P_{i,y} = P_{f,y}$$

- Para componente x

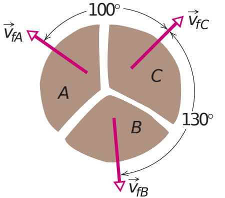
$$\begin{aligned} p_{fA,x} &= -v_{fA}(0,50M) \\ p_{fB,x} &= +v_{fB}\cos(50°)(0,20M) \\ p_{fC,x} &= +v_{fC}\cos(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

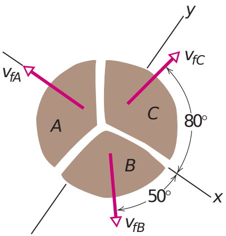
- Ficamos com

$$\begin{aligned} P_{i,x} &= p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x} \\ 0 &= -v_{fA}(0,50M) \\ &\quad + v_{fB}\cos(50°)(0,20M) \\ &\quad + v_{fC}\cos(80°)(0,30M) \end{aligned}$$

- e assim

$$\boxed{v_{fA} = 3,00\text{m/s}}$$





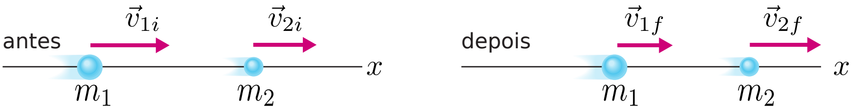
Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear
   - 9.1 O centro de massa
   - 9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas
   - 9.3 Momento Linear
     - Momento Linear de um sistema de partículas
   - 9.4 Colisão e Impulso
   - 9.5 Conservação do momento linear
   - 9.6 Momento e energia cinética em colisões
   - 9.7 Colisões elásticas em uma dimensão
   - 9.8 Colisões em duas dimensões
   - 9.9 Sistemas de Massa Variável

Momento e Energia Cinética em Colisões

- Sistema fechado e isolado:
$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$
  - Fechado: nenhuma massa entra ou sai do sistema (massa é conservada)
  - Isolado: nenhuma força externa produz variação de energia no sistema
- E a energia?
  - Se a energia cinética total não é alterada (conservada): colisão elástica
  - Se a energia cinética total é alterada (não conservada): colisão inelástica
  - O caso de maior perda de energia cinética, é o caso em que os dois corpos permanecem juntos: colisão perfeitamente inelástica

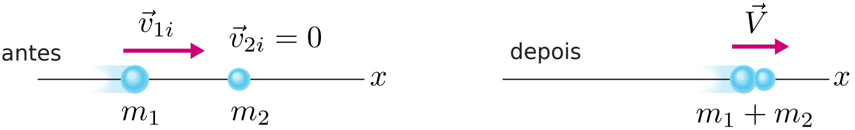
- Considere a situação abaixo



- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

- Considere a situação abaixo



- Neste caso, $v_{2i} = 0$ (alvo). Após a colisão, os corpos se movem juntos com velocidade V.
- Podemos escrever

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 V + m_2 V$$

$$\boxed{V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}}$$

- Em um sistema fechado e isolado, a velocidade $\vec{v}_{cm}$ do sistema não pode variar em uma colisão

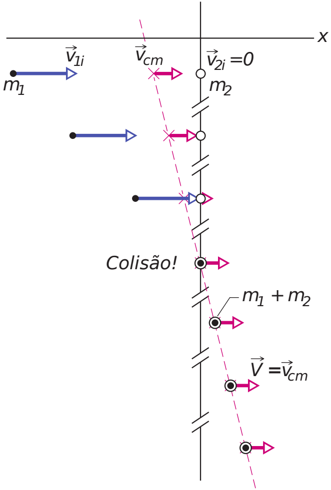
- Para obter o valor de $\vec{v}_{cm}$, vamos voltar ao sistema de dois corpos

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{cm}$$

- Como $\vec{P}$ é conservado: $\vec{P} = \vec{P}_i = \vec{P}_f$. Desta forma

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{cm}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{(m_1 + m_2)} = \frac{\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}{(m_1 + m_2)}}$$



Teste

O corpo 1 e o corpo 2 sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. Qual é o momento linear final dos corpos se os momentos iniciais são, respectivamente, (a) $10\text{kg} \cdot \text{m/s}$ e 0; (b) $10\text{kg} \cdot \text{m/s}$ e $4\text{kg} \cdot \text{m/s}$; (c) $10\text{kg} \cdot \text{m/s}$ e $-4\text{kg} \cdot \text{m/s}$?

Exemplo: Conservação do momento de um pêndulo balístico

Um pêndulo balístico de massa $M = 5,4$kg é atingido por uma bala de massa $m = 9,5$g que fica incrustada na madeira. O CM do sistema atinge uma altura de $h = 6,3$cm. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

- Vamos supor que durante a colisão, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado

- Podemos usar

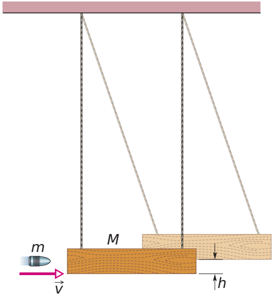
$$V = \frac{m}{m+M} v$$

- A energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$

- Obtemos $\boxed{v = \frac{m+M}{2}\sqrt{2gh} = 630\text{m/s}}$



Exemplo: Conservação do momento de um pêndulo balístico

Um pêndulo balístico de massa $M = 5,4$kg é atingido por uma bala de massa $m = 9,5$g que fica incrustada na madeira. O CM do sistema atinge uma altura de $h = 6,3$cm. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

- Vamos supor que durante a colisão, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado
- Podemos usar

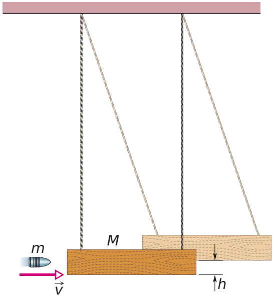
$$V = \frac{m}{m+M}v$$

- A energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$

- Obtemos $\boxed{v = \frac{m+M}{2}\sqrt{2gh} = 630\text{m/s}}$



Exemplo: Conservação do momento de um pêndulo balístico

Um pêndulo balístico de massa $M = 5,4$kg é atingido por uma bala de massa $m = 9,5$g que fica incrustada na madeira. O CM do sistema atinge uma altura de $h = 6,3$cm. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

- Vamos supor que durante a colisão, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado

- Podemos usar

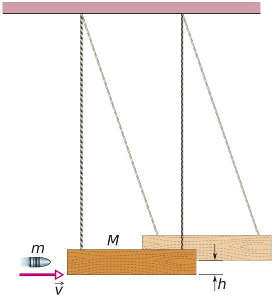
$$V = \frac{m}{m+M} v$$

- A energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$

- Obtemos $\boxed{v = \frac{m+M}{2}\sqrt{2gh} = 630\text{m/s}}$



Exemplo: Conservação do momento de um pêndulo balístico

Um pêndulo balístico de massa $M = 5,4$kg é atingido por uma bala de massa $m = 9,5$g que fica incrustada na madeira. O CM do sistema atinge uma altura de $h = 6,3$cm. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

- Vamos supor que durante a colisão, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado
- Podemos usar

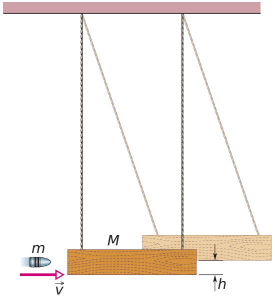
$$V = \frac{m}{m+M}v$$

- A energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$

- Obtemos $\boxed{v = \frac{m+M}{2}\sqrt{2gh} = 630\text{m/s}}$



Exemplo: Conservação do momento de um pêndulo balístico

Um pêndulo balístico de massa $M = 5,4$kg é atingido por uma bala de massa $m = 9,5$g que fica incrustada na madeira. O CM do sistema atinge uma altura de $h = 6,3$cm. Qual era a velocidade da bala antes da colisão?

- Vamos supor que durante a colisão, o sistema está isolado e o momento linear total é conservado
- Podemos usar

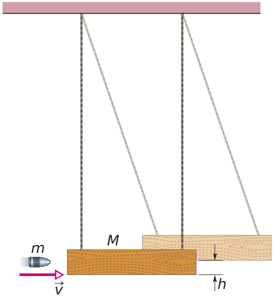
$$V = \frac{m}{m+M}v$$

- A energia mecânica do sistema bala-bloco-Terra é conservada

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$

- Obtemos $\boxed{v = \frac{m+M}{2}\sqrt{2gh} = 630\text{m/s}}$



Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear

9.1 O centro de massa

9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

9.3 Momento Linear

- Momento Linear de um sistema de partículas

9.4 Colisão e Impulso

9.5 Conservação do momento linear

9.6 Momento e energia cinética em colisões

9.7 Colisões elásticas em uma dimensão

9.8 Colisões em duas dimensões

9.9 Sistemas de Massa Variável

Colisões elásticas em uma dimensão

- Em geral, as colisões que acontecem no mundo macroscópico são inelásticas
- Porém, podemos supor que algumas são são aproximadamente elásticas

$$\boxed{K_i = K_f}$$

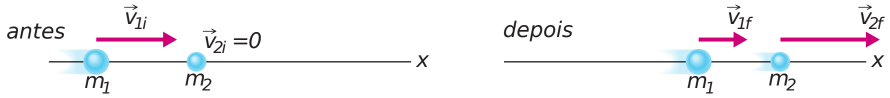
Colisão elástica

Nas colisões elásticas, a energia cinética dos corpos envolvidos na colisão pode variar, mas a energia cinética total do sistema permanece a mesma.

Alvo Estacionário

Colisões elásticas em uma dimensão

- Considere a situação abaixo



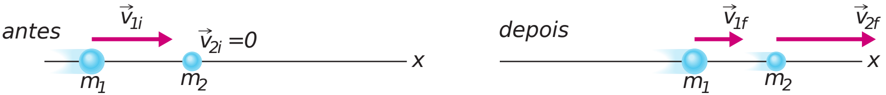
- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \Longrightarrow \quad m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

- Considere a situação abaixo



- Podemos reescrever as equações anteriores como

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \tag{1}$$
$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 v_{2f}^2 \tag{2}$$

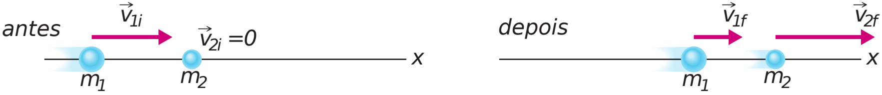
- Podemos escrever a Eq.(2)

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2 \tag{3}$$

- Dividindo a Eq.(3) pela Eq.(1) obtemos

$$\boxed{v_{1i} + v_{1f} = v_{2f}} \tag{4}$$

- Considere a situação abaixo

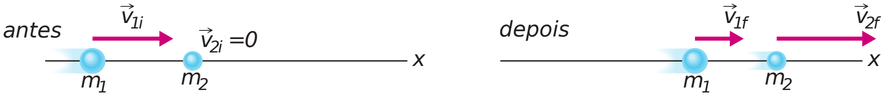


- Isolando v_{2f} na Eq. (4) do slide anterior, e substituindo na Eq.(1), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}} \tag{5}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (4) do slide anterior, e substituindo na Eq.(1), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}}$$



$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}}$$

- Massas iguais $(m_1 = m_2)$:

$$v_{1f} = 0 \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}$$

- Alvo pesado $(m_2 \gg m_1)$:

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1i}$$

- Projétil pesado $(m_1 \gg m_2)$:

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

Alvo em movimento

Colisões elásticas em uma dimensão

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \vec{P}_f \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) &= -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$\begin{aligned} K_i &= K_f \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) &= -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \tag{7}$$

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f} \right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f} \right) \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f} \right) \left(v_{1i} + v_{1f} \right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f} \right) \left(v_{2i} + v_{2f} \right) \tag{7}$$

Alvo em movimento
Colisões elásticas em uma dimensão

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \tag{7}$$

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \tag{7}$$

Alvo em movimento
Colisões elásticas em uma dimensão

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \vec{P}_f \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) &= -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$\begin{aligned} K_i &= K_f \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) &= -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \quad (6)$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \quad (7)$$

Alvo em movimento
Colisões elásticas em uma dimensão

- Podemos escrever a lei de conservação do momento linear para o sistema como

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right) \tag{6}$$

- Se a colisão é elástica, a energia cinética também é conservada

$$K_i = K_f$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$
$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = -m_2 \left(v_{2i} - v_{2f}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right) \tag{7}$$

- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$\boxed{(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})} \tag{8}$$

- Isolando v_{2f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{9}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{10}$$

Alvo em movimento

Colisões elásticas em uma dimensão

- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$\boxed{(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})} \tag{8}$$

- Isolando v_{2f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{9}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{10}$$

Alvo em movimento

Colisões elásticas em uma dimensão

- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$\boxed{(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})} \tag{8}$$

- Isolando v_{2f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{9}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{10}$$

Alvo em movimento
Colisões elásticas em uma dimensão

- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$\boxed{(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})} \tag{8}$$

- Isolando v_{2f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{9}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{10}$$

- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$\boxed{(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})} \tag{8}$$

- Isolando v_{2f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{9}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{10}$$

- Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (6) (do slide anterior), obtemos

$$\boxed{(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2i} + v_{2f})} \tag{8}$$

- Isolando v_{2f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{9}$$

- Isolando v_{1f} na Eq. (8) e substituindo na Eq. (6), obtemos

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}} \tag{10}$$

Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear
   - 9.1 O centro de massa
   - 9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas
   - 9.3 Momento Linear
     - Momento Linear de um sistema de partículas
   - 9.4 Colisão e Impulso
   - 9.5 Conservação do momento linear
   - 9.6 Momento e energia cinética em colisões
   - 9.7 Colisões elásticas em uma dimensão
   - **9.8 Colisões em duas dimensões**
   - 9.9 Sistemas de Massa Variável

Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

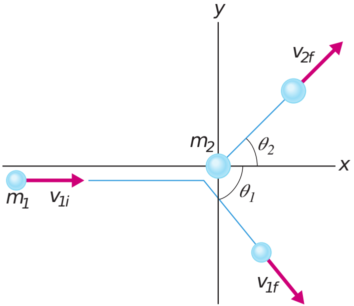
  - Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

  - Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

  - Para Eq. (12) $\quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$



Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

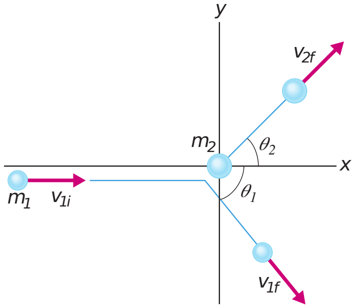
- Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

- Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

- Para Eq. (12) $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$



Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

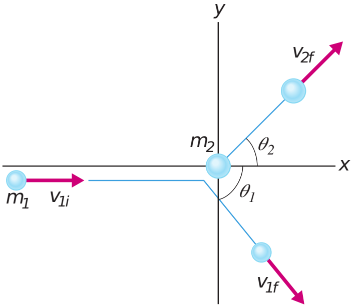
- Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

- Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

- Para Eq. (12) $\quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$



Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

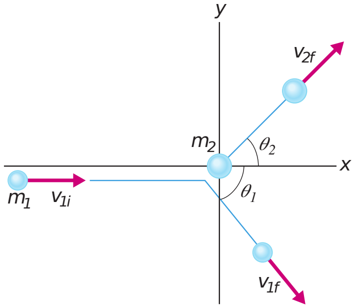
- Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

- Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

- Para Eq. (12) $\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$



Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

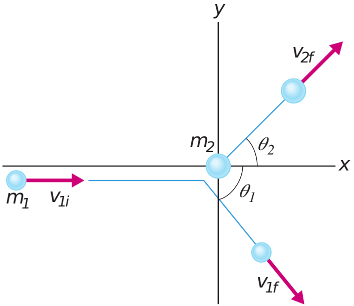
- Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

- Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

- Para Eq. (12) $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$



Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

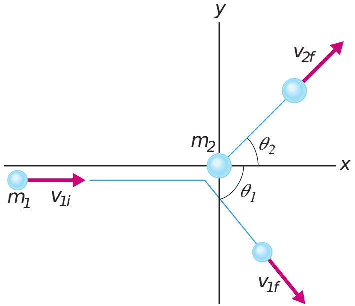
- Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

- Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \,\mathrm{sen}\,\theta_1 + m_2 v_{2f} \,\mathrm{sen}\,\theta_2$$

- Para Eq. (12) $\quad \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$



Colisões em Duas Dimensões

- Quando uma colisão não é frontal, a direção do movimento dos corpos é diferente antes e depois da colisão. Entretanto, se o sistema é fechado e isolado, o momento linear total continua a ser conservado nessas colisões bidimensionais:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \tag{11}$$

- Se a colisão também é elástica (um caso especial), a energia cinética total também é conservada:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{12}$$

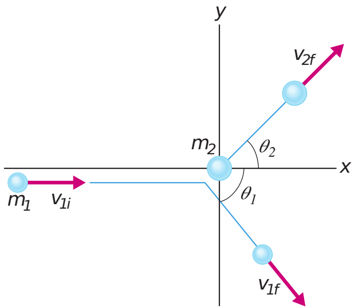
- Eq. (11) com relação ao eixo x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

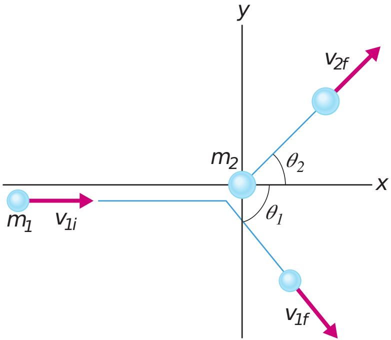
- Eq. (11) com relação ao eixo y

$$0 = -m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2$$

- Para Eq. (12) $$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$



Suponha que, na situação da figura abaixo, o projétil tem um momento inicial de $6\text{kg}\cdot\text{m/s}$, uma componente x do momento final de $4\text{kg}\cdot\text{m/s}$ e uma componente y do momento final de $-3\text{kg}\cdot\text{m/s}$. Determine (a) a componente x do momento final do alvo e (b) a componente y do momento final do alvo.



Sumário

9. Centro de Massa e Momento Linear

9.1 O centro de massa

9.2 A Segunda Lei de Newton para um sistema de Partículas

9.3 Momento Linear

- Momento Linear de um sistema de partículas

9.4 Colisão e Impulso

9.5 Conservação do momento linear

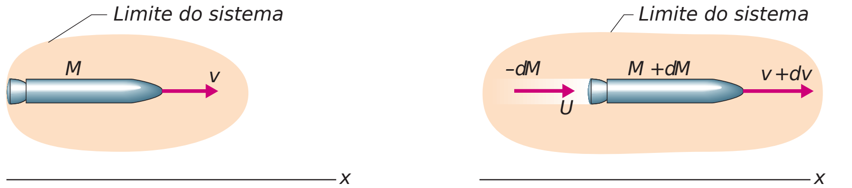
9.6 Momento e energia cinética em colisões

9.7 Colisões elásticas em uma dimensão

9.8 Colisões em duas dimensões

9.9 Sistemas de Massa Variável

- Temos de aplicar a segunda Lei de Newton ao conjunto formado pelo foguete e pelo produtos rejeitados. A massa desse sistema não varia com o tempo!



- Conservação do momento implica que

$$P_i = P_f \quad \Longrightarrow \quad Mv = -dM\, U + (M + dM)(v + dv) \tag{13}$$

- Velocidade Relativa

$$v_{fr} = v_{fp} + v_{pr} \quad \Longrightarrow \quad (v + dv) = v_{\text{rel}} + U \quad \Longrightarrow \quad U = v + dv - v_{\text{rel}} \tag{14}$$

- Substituindo U na Eq. (13), obtemos

$$-\,dM\; v_{\text{rel}} = M\; dv \quad \xrightarrow{\div dt} \quad -\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt} \tag{15}$$

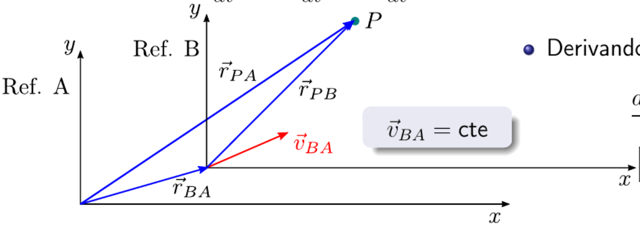
Movimento relativo em duas dimensões

- A coordenada $\vec{r}_{PA}$ de P medida por A pode ser escrita como

$$\boxed{\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}} \qquad (3)$$

- Derivando Eq. (3) em relação a t

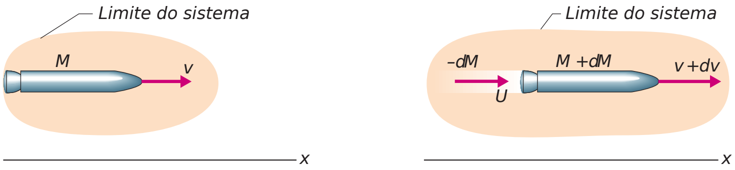
$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}} \qquad (4)$$



- Derivando Eq. (2) em relação a t

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}}$$



- Até aqui vimos que

$$-\frac{dM}{dt}v_{\text{rel}} = M\frac{dv}{dt}$$

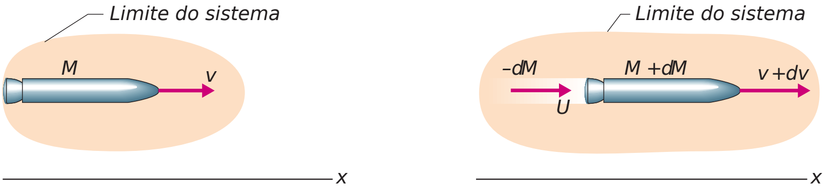
- Note que

$$\frac{dM}{dt} \longrightarrow \text{taxa com a qual o foguete perde massa} \implies \frac{dM}{dt} = -R$$

- Podemos escrever

$$\boxed{R\,v_{\text{rel}} = M\frac{dv}{dt} = Ma}$$

- Empuxo do motor (T): $\quad T = R\,v_{\text{rel}}$



- Da Eq. (15), temos

$$-dMv_{\text{rel}} = Mdv \quad \Longrightarrow \quad dv = -v_{\text{rel}}\frac{dM}{M}$$

- Integrando ambos os membros, obtemos

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_f - v_i = v_{\text{rel}}\ln\frac{M_i}{M_f}}$$

Exemplo: Empuxo e aceleração de um foguete

Um foguete cuja massa inicial M_i é 850kg consome combustível a uma taxa $R = 2,3$kg/s. A velocidade v_{rel} dos gases expelidos em relação ao motor do foguete é 2800m/s. (a) Qual é o empuxo do motor? (b) Qual é a aceleração inicial do foguete?

- O empuxo é calculado como

$$\begin{aligned} T = Rv_{\text{rel}} &= (2,3\text{kg/s})(2800\text{m/s}) \\ &= 6440\text{N} \approx 6400\text{N} \end{aligned}$$

- À medida que o combustível é consumido, M diminui e a aumenta. Como estamos interessados no valor inicial de a, usamos o valor inicial da massa, M_i

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{6440\text{N}}{850\text{kg}} = 7,6\text{m/s}^2$$

Dicas

- Reproduza as passagens de maneira independente!
- Está fazendo a lista?
- Estude as referências!
- Estude os exemplos resolvidos dos livros!

- D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Física - Mecânica*, volume 1. LTC, 10 edition, 2016
- P.A. Tipler and G. Mosca. *Física para Cientistas e Engenheiros*, volume 1. LTC, 10 edition, 2009
- H.M. Nussenzveig. *Curso de física básica, 1: mecânica.* E. Blucher, 2013
- H.D. Young, R.A. Freedman, F.W. Sears, and M.W. Zemansky. *Sears e Zemansky física I: mecânica*
- M. Alonso and E.J. Finn. *Física: Um curso universitário - Mecânica.* Editora Blucher, 2018
- R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *Lições de Física de Feynman.* Bookman, 2008