AULAS ANTERIORES 04/12/2020

Sistema EDOs : $\dot{F} = A\,F$, $F = F(t)$ ... vetor de soluções independ.

A

Diagonalizável

$\exists$ base de autovetores

$A \sim D$

(Diagonalização de Operadores)

Soluções independentes : $F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t}$

$$\begin{cases} \lambda_i \ldots \text{autovalor de } A \\ \vec{v_i} \ldots \text{autovetor }, \lambda_i \end{cases}$$

Solução Geral : $\underline{\underline{CL}}$

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, F_i(t)$$

Não Diagonalizável

$\nexists$ base de autovetores

$A \sim J$

(Forma de Jordan)

$A = P\,J\,P^{-1}$

$$\begin{cases} J = [\, T(\vec{e_i})_E \,] \\ P = [\, I \,]_C^E = [\, (\vec{e_i})_C \,] \end{cases}$$

Soluções independentes

Solução Geral / PVI

?

Slide 17 - Exponencial de uma Matriz

Expansão em série da função exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Então:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

OBSERVAÇÕES:

(1) Se $A \sim D$ (diagonal), então $\exists$ uma matriz P, inversível, tal que $A = PDP^{-1}$:

$$e^A = \underbrace{PP^{-1}}_{I} + PDP^{-1} + P\frac{D^2}{2!}P^{-1} + P\frac{D^3}{3!}P^{-1} + \dots + P\frac{D^n}{n!}P^{-1}$$

$$e^A = P\underbrace{\boxed{\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots + \frac{D^n}{n!}\right)}}_{M}P^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & 0 \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \lambda_3^2 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \lambda_3^n & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \underbrace{1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \dots + \frac{1}{n!}\lambda_1^n}_{e^{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underbrace{1 + \lambda_2 + \frac{1}{2!}\lambda_2^2 + \dots + \frac{1}{n!}\lambda_2^n}_{e^{\lambda_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \dots + \frac{1}{n!}\lambda_n^n}_{e^{\lambda_n}} \end{bmatrix}$$

De onde se conclui que:

$$e^{A} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1} = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{f} = af \longrightarrow f = e^{at}$$

$$\dot{F} = AF \longrightarrow F = e^{At}$$

(2) i) $A_{2\times2}$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \longrightarrow$ A é diagonalizável

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix} \longrightarrow Jt = \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

λ único autovalor

b) $\boxed{ma(\lambda) = 2}$ e A não é diagonalizável

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

$$m(x) = (x-2)^2$$

$$J = \boxed{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}} \longrightarrow Jt = \begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ t & \lambda t \end{bmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Até o final da linha, cada termo vizinho à esquerda será o da direita multiplicado por ct, c... constante.

*** Vem da expansão em Série de Taylor de e^{Jt}

constante que vem da expansão em série

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a & b & \dots\ t & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

* Se estiver na linha $\underline{\underline{n}}$: $\underbrace{\frac{t^{k-1}}{k-1!}}_{a}$ $\underbrace{\frac{t^{k-2}}{k-2!}}_{b}$ $\dots$ t 1

ii) $A_{3\times 3}$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \longrightarrow$ A é diagonalizável: $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e A não é diagonalizável

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ t e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

λ único autovalor

c) $\boxed{ma(\lambda) = 3}$ e A não é diagonalizável

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} & 0 \\ \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

(3) Solução Complexa $\longrightarrow$ A não é diagonalizável nos EV reais

PC: $p(\lambda) = (\lambda - z)(\lambda - \bar{z}) \begin{cases} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{cases}$ ← complexo conjugado

$A \sim J$, $J = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{(a+bi)t} & 0 \\ 0 & e^{(a-bi)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at}\, e^{bit} & 0 \\ 0 & e^{at}\, e^{-bit} \end{bmatrix} = e^{at} \begin{bmatrix} e^{bti} & 0 \\ 0 & e^{-bti} \end{bmatrix}$$

Fórmula de Euler : $e^{\theta i} = \cos\theta - i \,\mathrm{sen}\,\theta$

$$e^{Jt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt + i \,\mathrm{sen}\, bt & 0 \\ 0 & \cos bt - i \,\mathrm{sen}\, bt \end{bmatrix}$$

→ Os n. complexos vêm sempre em pares de solução : z e $\bar{z}$. Assim, todo Bloco de Jordan associado a uma raiz complexa de $p(\lambda)$ será de ordem $\underline{\underline{2}}$.

Slide 19 - Exercícios

5) PVI $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases}$, $x(0) = 1$; $y(0) = 2$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{F} \longrightarrow \boxed{\dot{F} = AF} \quad F = F(t)$$

A solução do sistema dependerá se A é ou não diagonalizável.

PC : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2 \xrightarrow{\lambda = 2} ma(\lambda) = 2$

$PM: \quad m(x) = (x-2)^2 \quad \therefore$ A não é diagonalizável

$\hookrightarrow mg(\lambda) = \dim(S_\lambda) = 1$

$\downarrow$

$(A-2I)^2 = O_{2\times 2} \therefore$ ind. nilpotência $= 2$

$\hookrightarrow \exists$ 1 BJ 2×2 associado a $\lambda = 2$. E como $A_{2\times 2}$, esse é o único bloco.

Logo $A \sim J$ e:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left([T(\vec{e_1})]_E \quad [T(\vec{e_2})]_E \right), \text{ pois } E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \text{ é a base tal que } [T]_E = J.$$

Então: $\quad A\vec{e_1} - 2\vec{e_1} = \vec{e_2} \; ; \; (A-2I)\vec{e_1} = \vec{e_2}$

$$[T(\vec{e_1})]_E = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} \quad \xrightarrow{T(\vec{v_i}) = A\vec{v_i}} \quad (A-2I)\vec{e_1} = \vec{e_2} \; \} \; \vec{e_1} \notin N(A-2I)$$

$$[T(\vec{e_2})]_E = 2\vec{e_2} \qquad\qquad (A-2I)\vec{e_2} = \vec{0} \; \} \; \vec{e_2} \in N(A-2I)$$

$$N(A-2I) = \{ \vec{v} \in V \,/\, (A-2I)\vec{v} = \vec{0} \}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-2I} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x = y$$

$$\therefore \vec{v}_N = [(1,1)] = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$$

Encontrando $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$:

$$\vec{e_1} \notin N(\cdot) \longrightarrow \vec{e_1} = (1,0) /\!/$$

$$\vec{e_2} = (A-2I)\vec{e_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{e_2} = (-1,-1) /\!/ \in N(\cdot)$$

Portanto:

$$P = [I]_C^E = \left([\vec{e}_1]_C \quad [\vec{e}_2]_C \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e $$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para sistemas do tipo $\dot{F} = AF$ em que A não é diagonalizável, a solução é da forma:

$$F(t) = e^{At} F_0 \xrightarrow{A \sim J} F(t) = P e^{Jt} P^{-1} F_0 \quad , \quad F_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$** \quad Jt = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ t & 2t \end{bmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Assim:

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ -te^{2t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} + e^{2t} \\ te^{2t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

E a solução do sistema é:

$$\begin{cases} x(t) = te^{2t} + e^{2t} \\ y(t) = te^{2t} + 2e^{2t} \end{cases}$$