MAT1352 - Cálculo para funções de uma variável real II - 2020

5ª Lista de exercícios

Referente às aulas 13 e 14

Os exercícios desta lista foram, em sua maior parte, extraídos ou adaptados do livro de Stewart. Consulte a referência para mais exercícios como esses.

1. Em uma cidade de 1 milhão de habitantes ocorreu um surto de uma nova epidemia. No instante inicial que se observou o surto já havia 5% dos habitantes contaminados. Estima-se que toda a população está sujeita a contrair o vírus, e que a taxa de crescimento do número de casos é proporcional ao produto da fração da população que está contaminada pela fração da população que não está. Estima-se, ainda, que a razão dessa proporção é de 0,1 se não houver medidas de isolamento social e de 0,05 se houver.

   (a) Escreva a função $f(t)$ que determina o número total de pessoas que já foram contaminadas após t dias do surto ter sido identificado, em cada um dos casos, com e sem isolamento. (Dica: primeiro use a solução da equação logística considerando a proporção dos habitantes contaminados, e depois multiplique por 1 milhão).

   (b) Escreva a função que determina o número de novos casos diários da doença, nos casos com e sem isolamento. Qual é a relação entre essa função e a $f(t)$ do item anterior?

   (c) Esboce os gráficos das funções encontradas no item anterior (com e sem isolamento), e em cada um desses casos responda: Quantas pessoas adoeceram no pico da doença? Após quantos dias aconteceu o pico?

   (d) Estima-se que 10% das pessoas infectadas necessitam de atendimento médico. Sabendo que a cidade tem capacidade de atender até 1500 pessoas por dia, quantas pessoas ficarão sem atendimento no caso de não haver isolamento social? Entre quais dias acontecerá essa sobrecarga no sistema de saúde? Haverá sobrecarga no caso de haver isolamento social?

2. Um tanque contém 100 L de água pura. Água salgada contendo 100g de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 10 litros por minuto. A solução é agitada e retirada do tanque e retirada do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque após seis minutos?

3. Resolva as seguintes equações diferenciais.

   (a) $f'(x) = xe^{-\operatorname{sen} x} - f(x)\cos x$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{e^y}$

   (c) $xy^2y' = x + 1$ (d) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

   (e) $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$ (f) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

   (g) $(y + \operatorname{sen} y)y' = x + x^3$ (h) $x^2y' - y = 2x^3e^{-1/x}$.

4. Resolva as seguintes equações diferenciais com condição inicial.

(a) $\begin{cases} f'(t) + 2tf(t) = f(t) \\ f(0) = 5. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ln\, x}{xy} \\ y(1) = 2. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{2t + sec^2 t}{2u} \\ u(0) = -5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} - y = x\, ln\, x \\ y(1) = 2. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (1 + \cos\, x)y' = (1 + e^{-y})\,\text{sen}\; x \\ y(0) = 0. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y' = 3x^2 e^y \\ y(0) = 1. \end{cases}$

5. O transporte de uma substância através de uma parede capilar na fisiologia pulmonar tem sido modelado pela equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

onde h é a concentração de hormônio na corrente sanguínea, t é o tempo, R é a taxa máxima de transporte, V é o volume do capilar e k é a constante positiva que mede a afinidade entre os hormônios e as enzimas que auxiliam o processo. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma relação entre h e t.