

A série binomial

Seja $k \in \mathbb{R}$ qualquer. Vamos determinar uma expansão para a função

$$f(x) = (1+x)^k$$

em torno de 0.

Temos : $f(0) = 1$

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \Rightarrow f'(0) = k.$$

$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \Rightarrow f''(0) = k(k-1)$$

$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = k(k-1)(k-2)$$

$\vdots$

$$f^{(m)}(x) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-m}$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1).$$

Portanto, a série de Taylor de f é

$$1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{m!}x^m + \dots$$

Notação : $\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{m!} = \binom{k}{m}$

Observe que se $k \in \mathbb{N}$, em algum momento,

m se iguala a k e teremos $\binom{k}{k} = \frac{k!}{k!} = 1$

para $m = k+1$, o fator $(k-m+1)$ fica 0

e se $m > k+1$, todos os coeficientes $\binom{k}{m}$ se anulam.

$\Rightarrow$ a série terá uma quantidade finita de termos não nulos.

Raio de Convergência:

$$\text{Seja } a_n = \left| \binom{k}{n} x^n \right|.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left| \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\dots(k-n+1)} \right|$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|k-n|}{n+1} |x| = \frac{\left| \left(\frac{k}{n} - 1 \right) \right|}{1 + \frac{1}{n}} |x|$$

$$\text{Portanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|.$$

Pelo teste da razão, a série será convergente se $|x| < 1$.

Conclusão: Para todo x com $|x| < 1$ vale:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$