

## DIAGONALIZAÇÃO

Seja  $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  um operador linear (operador linear é uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo.)

Digamos que  $T$  é diagonalizável se existir  $B$  base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovetores de  $T$ .

Suponha que  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base formada por autovetores de  $T$ . Então existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tais que  $T(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Então } T(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n \\
 T(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_n \\
 &\vdots \\
 T(v_n) &= 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + \lambda_n v_n
 \end{aligned}$$

Assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{array} \right] \text{ é uma matriz diagonal.}$$

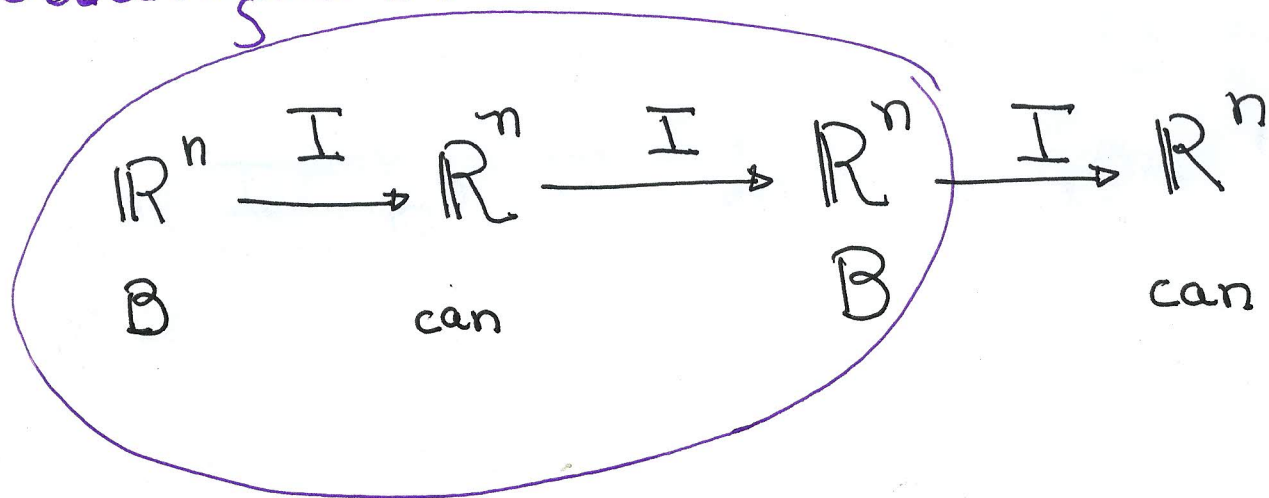
### OBJETIVO

Queremos determinar uma condição necessária e suficiente para que  $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  seja diagonalizável.

MAS ANTES PRECISAMOS DE ALGUMAS OBSERVAÇÕES

Observação (1)

9.3



$$I = I \circ I$$

$$I_n = [I]_B = [I]_{\text{can}, B} [I]_{B, \text{can}}$$

$$I_n = [I]_{\text{can}} = [I]_{B, \text{can}} [I]_{\text{can}, B}$$

Assim as matrizes  $[I]_{B, \text{can}}$  e  $[I]_{\text{can}, B}$

são inversas uma da outra.

Se  $P = [I]_{B, \text{can}}$ , então  $P^{-1} = [I]_{\text{can}, B}$

A matriz da identidade é  $I_n$  em qualquer base de  $\mathbb{R}^n$ .

OBS: 2)

Agora, vamos ver como a matriz de  $[T]_{\text{can}}$  e a matriz de  $T$  em outra base de  $\mathbb{R}^n$  se relacionam.

4

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{I} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{I} & \mathbb{R}^n \\ B & & \text{can} & & \text{can} & & B \end{array}$$

$$[I \circ T \circ I]_B = [T]_B = \underbrace{[I]_{\text{can}, B}}_{P^{-1}} \underbrace{[T]_{\text{can}}}_A \underbrace{[I]_{B, \text{can}}}_P$$

Temos então que se  $A = [T]_{\text{can}}$  e  $T$  é diagonalizável, então existe uma base  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $[T]_B = D$ , matriz diagonal e então

$$D = P^{-1} A P, \text{ onde } P = [I]_{B, \text{can}}$$



Exemplo:

Voltar a reflexão em torno da reta  $y = 2x$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$R = T_A$$

$$p_R(x) = p_A(x) = x^2 - 1$$

$$\mathbb{R}^2(\perp) = [(1, 2)]$$

$$\mathbb{R}^2(-1) = [(2, -1)]$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{I} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{I} & \mathbb{R}^2 \\ B & & \text{can} & & \text{can} & & B \end{array}$$

$$[I]_{\text{can}, R} [R]_{\text{can}} \underbrace{[I]_{R, \text{can}}}_P = [R]_B$$

$$B = \{ \underbrace{(1, 2)}_{v_1}, \underbrace{(2, -1)}_{v_2} \}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Precisamos também do seguinte:

DEF: Sejam  $M$  e  $N \in M_n(\mathbb{R})$ . A matriz  $N$  é semelhante à matriz  $M$  se existir uma matriz invertível  $P \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $P^{-1} M P = N$ .

É claro que se  $P^{-1} M P = N$

então  $P (P^{-1} M P) P^{-1} = P N P^{-1}$

Se  $Q = P^{-1}$ , então  $Q^{-1} = P$ .

Logo  $Q^{-1} N Q = M$  e  $M$  é semelhante à  $N$ .

Assim, dizemos  $M$  e  $N$  matrizes semelhantes.

(OBSERVE que se  $P$  é uma matriz invertível,

PROPOSIÇÃO: Se  $M$  e  $N$  são semelhantes, então

$p_M(x) = p_N(x)$ , ou seja, elas têm o mesmo polinômio característico.

Demonstração:

Seja  $P \in M_n(\mathbb{R})$  inversível tal que  $N = P^{-1}MP$ .

$$\begin{aligned}
 \det(N - xI_n) &= \det(P^{-1}MP - P^{-1}(xI_n)P) = \\
 &\underbrace{(-1)^n p_N(x)}_{\downarrow (*)} \det(P^{-1}(M - xI_n)P) = \\
 &\det P^{-1} \det(M - xI_n) \det P \\
 &= \underbrace{\det(M - xI_n)}_{(-1)^n p_M(x)}
 \end{aligned}$$

$$(*) P^{-1}(xI_n)P = xP^{-1}I_nP = xI_n$$



DEF: Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é diagonalizável se  $A$  for semelhante a uma matriz diagonal.

Se  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  for diagonalizável então  $A$  é diagonalizável. (pela observação 2)

AFIRMAÇÃO: Se  $A$  for diagonalizável então  $T_A$  é diagonalizável.

Dem:  $\exists P$  inversível tal que  $P^{-1}AP = D$ .  
 $\hookrightarrow$  diagonal.

Seja  $v_i = T_P(e_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$ .  
 $\{v_1, \dots, v_n\}$  é base pois  $T_P$  é bijetora.

$$T_A(v_i) = (AP)e_i = PD e_i = P \lambda_i e_i = \lambda_i P e_i = \lambda_i v_i$$

Como  $P$  é inversível,  $T_P$  leva base em base.  
 (OBSERVE que se  $D$  é uma matriz diagonal,



$$T_D(e_i) = \lambda_i \cdot e_i \quad , \quad \text{se} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(Sempre, na verdade, multiplicar a matriz  $A$  por  $e_i$ ,  $A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $A$ )

Seja  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  um autovalor de  $T$ .  
( $T = T_A$ )

Definimos:

MULTIPLICIDADE ALGÉBRICA DE  $\lambda$ ,  $m_a(\lambda)$ , como sendo a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $T$ .

MULTIPLICIDADE GEOMÉTRICA DE  $\lambda$ ,  $m_g(\lambda)$ , como sendo a  $\dim \text{Ker } T_M$ , onde  $M = A - \lambda I_n$ .

Sempre vale que

$$\underline{m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}, \text{ qualquer que seja o}$$

autovalor  $\lambda$  de  $T = T_A$ .

Suponha agora que  $T = T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  seja diagonalizável.

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os autovalores distintos de  $T$  (ou  $T_A$ ).

Seja  $B$  uma base de  $\mathbb{R}^n$  constituída por autovetores de  $T_A$  e ordene-a de modo que  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$  e  $B_i$  seja uma base do autoespaço  $\mathbb{R}^n(\lambda_i)$ .

Então  $[T]_B =$

$= D$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{n_1} & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}^{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \overbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}^{n_k} \end{bmatrix}$$

Suponha que  $B_i$  é constituída por  $n_i$  vetores e então  $n_1 + \dots + n_k = n$

Então  $\dim \mathbb{R}^n(\lambda_i) = n_i = m_g(\lambda_i)$ .

Podemos usar a matriz  $D$  para determinar o polinômio característico de  $A$ , dado que  $D = A$  são semelhantes.

Logo  $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ .

Logo  $m_a(\lambda_i) = n_i$

Assim, se  $T_A$  é diagonalizável vale que:

(1)  $p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ ,  $n = n_1 + \dots + n_k$ ,  
ou seja, todas as raízes de  $p_A(x)$  são reais.

(2)  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, k$ .

Essa é uma condição necessária para  $T = T_A$  ser diagonalizável.



12  
O "teorema" é provar que essa condição é também suficiente.

TEOREMA: Seja  $T = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  
 $T$  é diagonalizável se, e somente se,

$$(1) \quad p_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ se } i \neq j \\ \text{e } n_1 + \cdots + n_k = n.$$

$$(2) \quad m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Dem:  $(\Rightarrow)$  já provado

$(\Leftarrow)$  Seja  $B_i$  base de  $\mathbb{R}^n(\lambda_i)$  para  $i = 1, \dots, k$ .  
Cada  $B_i$  tem  $n_i$  vetores já que  $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ .

Seja  $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ .  
Temos que mostrar que  $B$  é LI.

Para isso suponha que  $B_L = \{v_{L1}, \dots, v_{Ln_L}\}$

13

se suponha que

$$a_{11}v_{11} + \dots + a_{1n_1}v_{1n_1} + a_{21}v_{21} + \dots + a_{2n_2}v_{2n_2} + \dots + a_{k1}v_{k1} + \dots + a_{kn_k}v_{kn_k} = 0. \quad (*)$$

Mostrar que todos os escalares  $a_{il}$  são nulos.

Seja  $v_i = a_{i1}v_{11} + \dots + a_{in_i}v_{in_i}$ ,  $\forall i=1, \dots, k$ .

$v_i \in \mathbb{R}^n(\lambda_i)$   $\forall i=1, \dots, k$ .

$$T(v_i) = \lambda_i v_i.$$

De (\*) temos que  $v_1 + \dots + v_k = 0$

Logo  $\lambda_1(v_1 + \dots + v_k) = 0$   
Também  $T(v_1 + \dots + v_k) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Temos então: } \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k &= 0 \\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k &= 0 \end{aligned}$$

Assim  $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_2 + \dots + \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} v_k = 0$

A ideia é provar que sempre que  
 $v_1, \dots, v_k$  são vetores tais que  $v_i \in \mathbb{R}^n(\lambda_i)$   
 e  $v_1 + \dots + v_k = 0$ , então  $v_i = 0$   
 $\forall i = 1, \dots, k$ .

A demonstração é por indução em  $k$ .

$k=1$  — nada a fazer

$k=2$

Suponha que  $v_1 + v_2 = 0$ ,  $v_1 \in V(\lambda_1)$  e  $v_2 \in V(\lambda_2)$   
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Então  $\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 = 0$

$T(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$

$v_2 = 0 \subset v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$  ✓



$$k = 3$$

15

Suponha que  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

Então  $\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_1 v_3 = 0$

$$T(v_1 + v_2 + v_3) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{V(\lambda_2)} v_2 + \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_3)}_{V(\lambda_3)} v_3 = 0$$

Pelo caso anterior,  $k=2$ ,  $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_2 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_3)}_{\neq 0} v_3 = 0$

~~$\Rightarrow v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$~~   
 Por indução, provamos que  $v_1 + \dots + v_k = 0 \Rightarrow v_i = 0 \forall i=1, \dots, k$

Se cada  $v_i = 0$ , voltando a (\*) temos que os escalares  $a_{ij}$  são todos iguais a 0.

Logo  $B$  é LI e contém  $n_1 + \dots + n_k = n$  vetores.

Assim  $B$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovetores de  $T$

Exemplos: (1)  $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

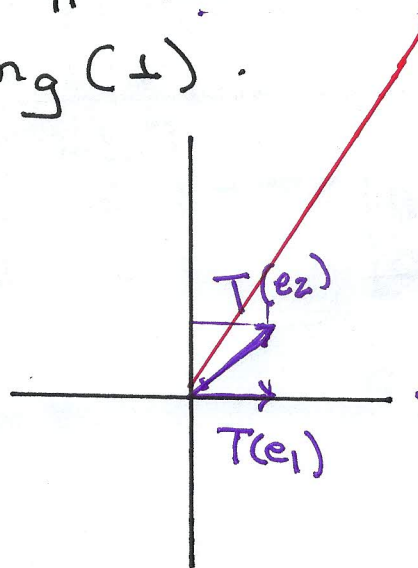
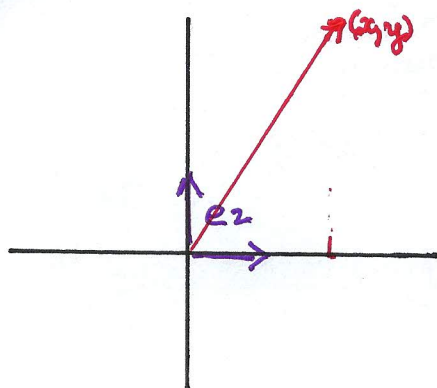
16

$$p_A(x) = (x - 1)^2 \quad m_A(1) = 2$$

$$\mathbb{R}^2(1) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{R}^2(1) = [e_1]$$

$m_g(1) = 1 \Rightarrow T_A$  não é diagonalizável.  
pois  $m_A(1) \neq m_g(1)$ .



$$= (1-x)[x^2 + 2x + 1] - 2[-2x - 2] - 2[2x + 2]$$

$$= (1-x)(x+1)^2$$

Autovalores

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -1$$

$$m_a(\lambda_1) = 1 \quad m_a(\lambda_2) = -1$$

$$\mathbb{R}^3(1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{dividir as} \\ \text{linhas por 2}}]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}$$

$$\mathbb{R}^3(1) = [(1, 1, 1)]$$

$$m_a(1) = m_g(1)$$



### Exemplo (2)

18

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p_A(x) = -\det(A - x I_3) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

$$m_a(1) = 2 \quad m_a(2) = 1$$

$$\mathbb{R}^2(2) = [(1, -2, 1)] \quad \dim \mathbb{R}^2(2) = 1 = m_g(1).$$

$$m_g(1) \neq m_a(1) \quad T_A \text{ não é diagonalizável.}$$

### Exemplo (3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$p_A(x) = -\det \begin{bmatrix} 1-x & 2 & -2 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 2 & 2 & -3-x \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & (1-x) [(1-x)(-3-x) + 4] - 2 [2(-3-x) + 4] - 2 [4 - 2(1-x)] \\ &= (1-x) [-3 - x + 3x + x^2 + 4] - 2 [-6 - 2x + 4] - 2 [4 - 2 + 2x] \end{aligned}$$

(4) Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$p_A(x) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = x^2 + 1$$

Como  $x^2 + 1$  não tem raízes reais, essa matriz não é diagonalizável, já não vale a primeira condição!

(5) Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e se tem  $n$  autovalores distintos então  $A$  é diagonalizável.

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ se } i \neq j.$$

$$m_a(\lambda_i) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$1 \geq m_g(\lambda_i) \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) = 1.$$

aqui usamos que

$$m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) = 1$$

pois  $\exists v_i \neq 0$  tal que  $v_i \in \mathcal{R}^n(\lambda_i)$