MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Sistemas lineares de controle
Princípio do Bang-Bang[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] A. Leitão [Seção 3.7].

- Um problema importante que surge em diversas aplicações **práticas** é aquele em que consideramos restrições às variáveis de controle de uma equação de estado dada.
- Sob tais **condições** é importante saber quais estados podem ser atingidos em um determinado intervalo de tempo e como são caracterizados os controles que atuam em tais sistemas.

Nesta aula discutiremos a atingibilidade de estados com **restrições** de controle e posteriormente o Princípio do **Bang-Bang** para controles escalares. Inicialmente veremos que a controlabilidade de um dado sistema depende do conjunto de controles **admissíveis**. Posteriormente veremos que em tais casos, o conjunto de estados atingíveis são dados por controles do tipo **Bang-Bang**, ie., controles que assumem valores extremos dentro daqueles permitidos.

Considere o **seguinte** sistema de controle de estado

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad\qquad (*)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ o **controle**, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ constantes.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ o conjunto ao qual está **restrita** a escolha das estratégias de controle. A partir dele definimos o conjunto de controles admissíveis

$$U_{ad}(\Omega) = \{u \in L^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^r) \;:\; u(t) \in \Omega \quad \text{qtp} \quad [t_0, t_1]\}$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. O conjunto **atingível** por x_0 é dado por

$$\begin{aligned} R(\Omega; t_0, x_0, t_1) \quad = \quad & \{x_1 \in \mathbb{R}^n \;:\; \exists u \in U_{ad}(\Omega) \\ & \text{tal que o estado } u \text{ evolui } x(t_0) = x_0 \text{ a } x(t_1) = x_1 \;\}. \end{aligned}$$

- Veja que $R(\Omega; t_0, x_0, t_1) = \mathbb{R}^n$ quando $\Omega = \mathbb{R}^r$ e o sistema $(*)$ é **controlável**, ie., quando o **posto** da matriz $[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B]$ é igual a n.

Exemplo.

Considere o sistema de estado $(*)$ dado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para algum $a \in \mathbb{R}$.

Note que para qualquer $a \in \mathbb{R}$ a **matriz**

$$[B\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

possui posto 2. Daí concluímos que $(*)$ é **completamente** controlável para todo a.

Escolha agora $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ e considere a **bola** de raio $R > 0$

$$\Omega = \{u(t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|u(t)\| \leq R\}.$$

Logo, pela **fórmula** da variação das constantes temos que

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds = \int_0^t e^{a(t-s)} u(s)\, ds \in \mathbb{R}^2.$$

Então:

i) se $a > 0$

$$\begin{aligned} R(\Omega; 0, 0, t_1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| \leq R \int_0^{t_1} e^{a(t_1-s)} ds\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| \leq Ra^{-1}(e^{at_1} - 1)\} \quad \neq \quad \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Note que a restrição dos controles implicam na **restrição** do conjunto de estados atingíveis. Ainda assim temos

$$\cup_{t_1 > 0} R(\Omega; 0, 0, t_1) = \mathbb{R}^2.$$

ii) Se $a < 0$ também temos

$$\begin{aligned} R(\Omega; 0, 0, t_1) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| \leq R \int_0^{t_1} e^{a(t_1-s)} ds\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| \leq R|a|^{-1}(1 - e^{at_1})\} \quad \neq \quad \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Mas nesse caso,

$$\cup_{t_1>0} R(\Omega; 0, 0, t_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x\| \leq R|a|^{-1}\}.$$

- Este exemplo ilustra **precisamente** como a restrição do conjunto de controles pode afetar a controlabilidade da equação de estado $(*)$.

Aqui estamos particularmente interessados na classificação dos problemas que são solucionados por **controles** do tipo Bang-Bang, ie.

$$\text{controles } u \in U_{ad}(\Omega) \text{ satisfazendo } u(t) \in \partial\Omega \;\text{ qtp }\; t \in [t_0, t_1].$$

Assuma:

- $\Omega = [a, b]$ com $-\infty < a, b < \infty$;
- $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ com $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^n$ e assim

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds.$$

- Note que se $u \in U_{ad}(\Omega)$, então u é **integrável e limitado** em $[t_0, t_1]$.

Considere agora o conjunto

$$S(\Omega; t_0, t) = \left\{ \int_{t_0}^{t} e^{-As}Bu(s)\,ds \;:\; u \in U_{ad}(\Omega) \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Assim

$$x \in R(\Omega; t_0, x_0, t) \iff (e^{-At}x - e^{-At_0}x_0) \in S(\Omega; t_0, t).$$

Defina agora o conjunto de **controles** Bang-Bang

$$U_{bb}(\Omega) = \{u \in U_{ad}(\Omega) \ : \ u(t) \in \partial\Omega \text{ qtp}\}$$

e o conjunto dos estados **atingíveis** por esse tipo de estratégia de controle

$$R_{bb}(\Omega; t_0, x_0, t) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists u \in U_{bb}(\Omega) \text{ que evolui } x(0) = x_0 \text{ a } x(t) = x_1\}.$$

Teorema

Para qualquer $t \in [t_0, T]$ temos

$$R(\Omega; t_0, x_0, t) = R_{bb}(\Omega; t_0, x_0, t).$$

- 'O conjunto de estados **atingíveis** do sistema de estado $(*)$ em $[t_0, T]$ com condição inicial x_0 é igual ao conjunto de estados atingíveis nas mesmas condições mas realizados por controles do tipo **Bang-Bang** (controles u tais que $u(t) \in \partial\Omega$ para todo t).'

Prova. É claro que $R_{bb}(\Omega; t_0, x_0, t) \subset R(\Omega; t_0, x_0, t)$. Vamos provar a inclusão contrária. Para tanto observamos **inicialmente** que é suficiente provar que:

$$\forall x \in S(\Omega; t_0, t) \text{ existe } \bar{u} \in U_{bb}(\Omega) \text{ tal que}$$
$$x = I(\bar{u}) := \int_{t_0}^{t} e^{-As} B\bar{u}(s)\, ds. \qquad (Af)$$

De fato, como $x \in R(\Omega; t_0, x_0, t) \iff \bar{x} = e^{-At}x - e^{-At_0}x_0 \in S(\Omega; t_0, t)$ e supondo (Af) **verdadeira** temos que $\exists \bar{u} \in U_{bb}(\Omega)$ tal que $I(\bar{u}) = \bar{x}$. Daí,

$$\begin{aligned} x &= e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\bar{x} = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}I(\bar{u}) \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B\bar{u}(s)\, ds \;\Rightarrow\; x \in R_{bb}(\Omega; t_0, x_0, t). \end{aligned}$$

Veja inicialmente que a aplicação

$$I : U_{ad}(\Omega) \subset L^\infty([t_0,t];\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^n : u \mapsto \int_{t_0}^t e^{-As} Bu(s)\, ds$$

é linear e contínua na topologia fraca de $L^\infty([t_0,t];\mathbb{R})$. A **linearidade** é clara pois

$$\begin{aligned} I(u+\alpha v) &= \int_{t_0}^t e^{-As} B(u+\alpha v)(s)\, ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{-As} Bu(s)\, ds + \alpha \int_{t_0}^t e^{-As} Bv(s)\, ds = I(u) + \alpha I(v). \end{aligned}$$

A **continuidade** segue da definição de convergência fraca em $L^\infty([t_0,t];\mathbb{R})$. Temos que u_n converge fraco para u em $L^\infty([t_0,t];\mathbb{R})$ se só se

$$\int_{t_0}^t u_n(s)\, \phi(s)\, ds \to \int_{t_0}^t u(s)\, \phi(s)\, ds \quad \forall \phi \in L^1([t_0,t];\mathbb{R}).$$

Dái, se u_n converge **fraco** para u em $L^\infty([t_0,t];\mathbb{R})$ então

$$I(u_n) - I(u) = \int_{t_0}^t e^{-As} Bu_n(s)\, ds - \int_{t_0}^t e^{-As} Bu(s)\, ds \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty$$

já que $e^{-A\cdot} B \in L^1([t_0,t];\mathbb{R}^n)$. Logo I é **contínua**.

Prova do teorema

Provemos agora a afirmação (Af). Para tanto seja $x \in S(\Omega; t_0, t)$ e considere

$$M = I^{-1}(\{x\}) \cap U_{ad}(\Omega) = \{u \in U_{ad}(\Omega) \ : \ I(u) = x\}$$

a **imagem** inversa de x pela aplicação I.

- Note que M é o conjunto dos controles admissíveis que garantem a inclusão de x em $S(\Omega; t_0, t)$. Daí concluiremos (Af) se **provarmos** que existe

$$\bar{u} \in M \cap U_{bb}(\Omega).$$

- Neste ponto usamos o seguinte resultado que é deixado como exercício.

$R(\Omega; t_0, x_0, t)$ é convexo e compacto

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ é convexo e compacto, então $R(\Omega; t_0, x_0, t)$ também o é.

- Vejamos agora que $R(\Omega; t_0, x_0, t)$ convexo e compacto implica $S(\Omega; t_0, t)$ **convexo** e compacto. Como

$$x \in R(\Omega; t_0, x_0, t) \iff (e^{-At}x - e^{-At_0}x_0) \in S(\Omega; t_0, t)$$

temos que $S(\Omega; t_0, t)$ é a imagem por uma transformação **afim** de $R(\Omega; t_0, x_0, t)$. Daí, $R(\Omega; t_0, x_0, t)$ é convexo e compacto, se e só se, $S(\Omega; t_0, t)$ o é.

- Agora, **combinando** a linearidade e continuidade de I com a convexidade e compacidade de $S(\Omega; t_0, t)$ obtemos que o conjunto M também é **convexo** e compacto na topologia fraca[2] de $L^\infty([t_0, t]; \mathbb{R})$. Primeiro note que $M = I^{-1}(x)$ é limitado e **fechado** já que $U_{ad}(\Omega)$ é limitado e I é contínua, logo é compacto na topologia fraca. Sejam agora u e $v \in I^{-1}(x)$ e $\lambda \in [0, 1]$. Então

$$x = \lambda x + (1 - \lambda)x = \lambda I(u) + (1 - \lambda)I(v) = I(\lambda u + (1 - \lambda)v)$$

  já que I é uma aplicação **linear**. Logo $\lambda u + (1 - \lambda)v \in M$ e M é convexo.
- Pelo Teorema de Krein-Milman ▸ Link **existe** $\bar{u} \in M$ que é ponto extremo de M, ie., que não pode ser escrito como combinação linear convexa de qualquer **dois** pontos de M. **Veremos** que isso implicará $\bar{u}(t) \in \partial\Omega$ qtp $[t_0, t_1]$.

[2] ie., toda sequência **limitada** em $L^\infty([t_0, t]; \mathbb{R})$ possui subsequência fracamente convergente.

- **Vejamos** então que $\bar{u}(t) \in \partial\Omega = \{a, b\}$ qtp $[t_0, t_1]$. Por hipótese $\Omega = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado. Suponha por **contradição** que $\bar{u}(t) \notin \partial\Omega = \{a, b\}$ qtp. Então, $\exists E \subset [t_0, t_1]$, $|E| > 0$[3], tal que $\bar{u}(s) \in (a, b) \forall s \in E$.
- Considere então

$$E_k = \{s \in E \ : \ \bar{u}(s) \in (a + k^{-1}, b - k^{-1})\} \quad k = 1, 2, ...$$

  Note que $E = \cup_k E_k$ e assim ao menos **um** dos E_k satisfaz $|E_k| > 0$.
- Logo existe $\epsilon > 0$ e $F \subset E$ com $|F| > 0$ tal que $\bar{u}(s) \in (a + \epsilon, b - \epsilon) \ \forall s \in F$. Como $|F| > 0 \Rightarrow L^\infty(F; \mathbb{R})$ possui dimensão **infinita** temos que a aplicação

$$I_F : L^\infty(F; \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^n : v \mapsto \int_F e^{-As} Bv(s)\, ds$$

  não é injetiva.

[3] Aqui $|E|$ denota a medida de Lebesgue de subconjuntos $E \subset \mathbb{R}$.

- Assim $\exists v \neq 0$ em $L^\infty(F;\mathbb{R})$ tal que $I_F(v) = 0$. **Estendemos** v em $[t_0, t_1]$ como

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v(t) & t \in F \\ 0 & t \in [t_0, t_1] \setminus F \end{cases}.$$

  Então $I(\bar{v}) = 0$.

- Sem **perda** de generalidade podemos supor $|\bar{v}| \leq 1$. Assim

$$a \leq \bar{u}(t) \pm \epsilon\bar{v}(t) \leq b \quad \text{qtp} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(t) \pm \epsilon\bar{v}(t) \in U_{ad}(\Omega).$$

- Como I é uma aplicação **linear** e $I(\bar{v}) = 0$ temos que

$$I(\bar{u}(t) \pm \epsilon\bar{v}(t)) = I(\bar{u}) = x \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(t) \pm \epsilon\bar{v}(t) \in M.$$

  Isso nos leva a uma **contradição** pois se $\bar{u}(t) \pm \epsilon\bar{v}(t) \in M$

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\bar{u}(t) + \epsilon\bar{v}(t)) + \frac{1}{2}(\bar{u}(t) - \epsilon\bar{v}(t))$$

  pode ser escrito como a combinação convexa de **dois** pontos em M. Mas isso é **falso** já que $\bar{u}$ é ponto extremo de M.

$\square$

Exercício 1.

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ uma aplicação afim, ie. dada por $\phi(x) = Ax + b$ para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^m$ é convexo, então $\phi^{-1}(U)$ também é convexo.

Exercício 2.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e compacto, então $R(\Omega; t_0, x_0, t)$ também é convexo e compacto.