Estatística de Redes Sociais

Antonio Galves

Módulo 5

O efeito da polarização sobre a rede

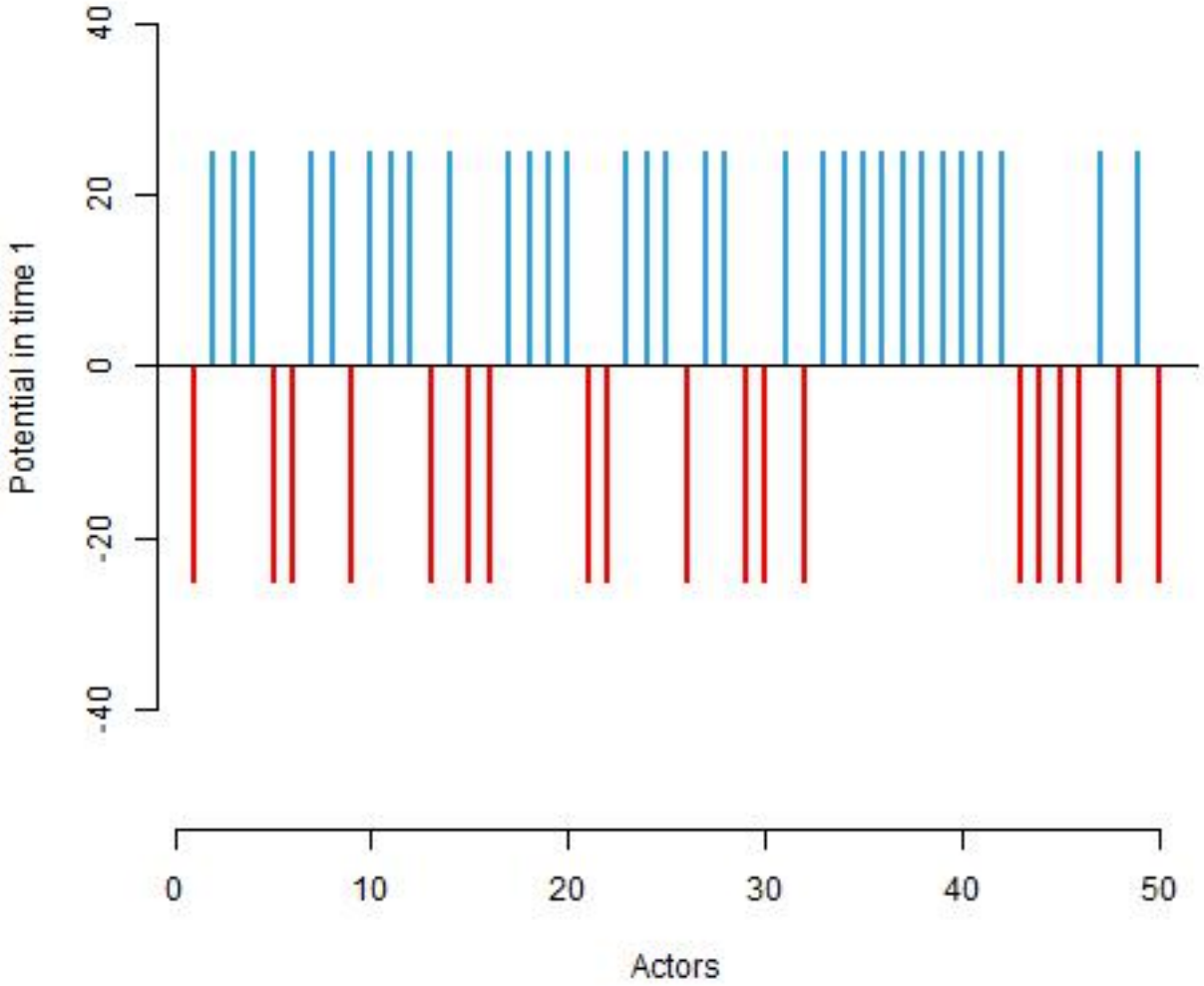
22a. aula

Conclusão, extensões e implementações

Algumas simulações para concluir o curso

- Considere a seguinte simulação do modelo de rede com pressão social.
- Temos uma rede com $N = 50$ atores.
- Inicialmente, cada ator recebe uma pressão social a favor ou contra, ao acaso, com probabilidade $1/2$, $1/2$.
- Independentemente da pressão social inicial sobre cada ator ser a favor ou contra, seu valor absoluto é 25.
- Essa situação é descrita na imagem do slide seguinte. A pressão social é representada em azul quando ela é favorável, e é representada em vermelho quando é contrária. As pressões positivas apontam para cima, e as negativas apontam para baixo.

Situação inicial do sistema



Evolução da rede social

- Simulação 1
- Simulação 2
- Simulação 3
- Simulação 4

QUIZ

- O coeficiente de polarização β desta rede é grande ou pequeno?

Algumas simulações que talvez tenham algo novo

- Simulação 1
- Simulação 2
- Simulação 3
- Simulação 4

QUIZ

- Tendo observado 4 simulações desta rede, dá para suspeitar que há um robô no conjunto de atores?

Visão geral do curso

- **Módulo 1:** Motivação, quadro conceitual e perguntas básicas. A formação de consenso na rede. O modelo do votante.
- **Módulo 2:** Grafos Aleatórios e Redes Sociais
- **Módulo 3:** Um modelo de rede com pressão social sobre os atores.
- **Módulo 4:** Polarização e evolução da rede com pressão social
- **Módulo 5:** O efeito da polarização sobre a rede.

Tópicos da 3ª Prova

- Na 3ª Prova, discutiremos o conteúdo dos Módulos 4 e 5.
- Recapitulando:
- Rede com pressão social: polarização, medida de probabilidade invariante e comportamento ao longo do tempo.
- Unicidade, invariância por simetria da medida de probabilidade invariante.
- Convergência para a medida de probabilidade invariante.
- Dois comportamentos extremos: casos $\beta = 0$ e $\beta = +\infty$.
- Dois comportamentos na evolução da rede.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 1:**
- Denotamos
$$f_\beta(r) = \frac{e^{\beta r}}{e^{\beta r} + e^{-\beta r}}.$$
- Pergunta: Como β afeta a função f_β?
- Em outras palavras, como a **sensibilidade** de um ator à pressão social muda em função do parâmetro de **polarização** β?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 2:**
- O valor $\beta = 0$ modela que tipo de situação social?
- Em termos mais matemáticos: se $\beta = 0$, quanto vale $\mathbb{P}(O_{n+1} = +1 \mid A_{n+1} = a, U_n(a))$?
- Se $\beta = 0$, quanto vale $\mathbb{P}(A_{n+1} = a | U_n)$?
- Se $\beta = 0$, quanto vale $\mathbb{P}(A_{n+1} = a, O_{n+1} = +1 | U_n)$?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 3:**
- Diga se é verdadeira a afirmação

$$-v = \pi_{a_k,-o_k}(...(\pi_{a_1,-o_1}(-u))...).$$

- Diga se é verdadeira a afirmação

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{O_i = o_i, A_i = a_i\}|U_0 = u\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{O_i = -o_i, A_i = a_i\}|U_0 = -u\right).$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 4:**
- Dado duas configurações $u, v \in \mathcal{S}_N$, diga se a seguinte afirmação é verdadeira:
- A probabilidade de haver um caminho que leve de u a v em k etapas
- é igual à
- probabilidade de haver um caminho que leve de $-u$ a $-v$ em k etapas.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 5:**
- Mostre que

$$\mathbb{E}(T^{u\to u}) = \mathbb{E}(T^{-u\to -u}).$$

- Mostre que se para qualquer lista inicial $v \in \mathcal{S}_N$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(U_n^v = u) = \mu(u),$$

e $\mu(u) = \mu(-u)$, então para qualquer $v \in \mathcal{S}_N$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(O_n^v = +1) = 1/2.$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 6:**
- Suponhamos que agora estamos trabalhando com o modelo de rede com pressão social com parâmetro de polarização $\beta \in [0, +\infty)$ fixado. Durante o curso até a aula de hoje, trabalhamos exclusivamente com o caso $\beta = 1$. Diga o que muda nos QUIZes e exercícios anteriores se em vez de $\beta = 1$ trabalharmos com $\beta \in [0, \infty)$.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 7:**
- Para $o \in \mathcal{O}$, seja

$$q(o|u) = \frac{\sum_{a \in \mathcal{A}_N} e^{o\beta u(a)}}{\sum_{a \in \mathcal{A}_N} [e^{\beta u(a)} + e^{-\beta u(a)}]}.$$

- É verdade que para todo $u \in \mathcal{S}_N$ vale a igualdade

$$q(+1|u) = q(-1|-u)?$$

- É verdade que as duas questões anteriores implicam que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(O_n^v = +1) = 1/2?$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 8:**
- Quais são as diferenças entre o Algoritmo 1 e o Algoritmo 2?
- Qual o objetivo dessas diferenças?
- Escreva o pseudo-código do Algoritmo concatenando os Algoritmos 1 e 2 e terminando com o Algoritmo Preliminar, após as duas listas ficarem iguais à escada simultaneamente.
- Por que concatenamos os Algoritmos 1, 2 e Preliminar?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 9:**
- Construímos simultaneamente $(U_n^u, U_n^v)_{n\geq 0}$ utilizando a concatenação dos Algoritmos 1, 2 e Preliminar descrita na Aula 19.
- Encontre um majorante para

$$\mathbb{P}(U_n^u \neq U_n^v).$$

- Encontre um majorante para

$$\mathbb{P}(T^e > 2kN).$$

- Quanto vale

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(T^e > 2kN)?$$

- Quanto vale

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T^{u,v} > n)?$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 10:**
- Vamos supor que a lista inicial $U_0 = u$ seja sorteada em $\mathcal{S}_N$ com probabilidade $\nu(u)$, onde ν é uma medida de probabilidade em $\mathcal{S}_N$.
- Para todo $n \geq 1$, quanto vale a distribuição de U_n?
- Em particular, quanto vale a distribuição de U_n quando a lista inicial é escolhida usando μ, a medida de probabilidade invariante da cadeia?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 11:**
- Que termos permanecem, quando calculamos a diferença,

$$|\sum_{z\in\mathcal{S}_N}\mathbb{P}(U_n^v=u,U_n^\mu=z)-\sum_{z\in\mathcal{S}_N}\mathbb{P}(U_n^v=z,U_n^\mu=u)|?$$

- Verifique que

$$|\sum_{z\neq u}\mathbb{P}(U_n^v=u,U_n^\mu=z)-\sum_{z\neq u}\mathbb{P}(U_n^v=z,U_n^\mu=u)|\leq\mathbb{P}(U_n^v\neq U_n^\mu).$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 12:**
- Descreva como evoluem $(U_n^{\beta,v})_{n\geq 0}, (A_n^{\beta,v})_{n\geq 0}, (O_n^{\beta,v})_{n\geq 0}$ no caso em que $\beta = 0$.
- Por que $U_n^{0,v}$ não depende mais de v a partir do primeiro instante n tal que

$$\{A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0\} = \mathcal{A}_N?$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 13:**
- Seja
$$T^N = \inf\{n : \{A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0\} = \mathcal{A}_N\}.$$
- Calcule a distribuição de T^N.
- Dadas $u, v \in \mathcal{S}_N$ duas listas distintas, proponha um algoritmo para simular simultaneamente $(U_n^{0,u})$ e $(U_n^{0,v})$ de tal forma que $U_n^{0,u} = U_n^{0,v}$ para todo $n \geq T^N$.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 14:**
- Vamos supor que $v(a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}_N$, e que existe ao menos um ator $b \in \mathcal{A}_N$ que satisfaz $v(b) > 0$.
- Calcule

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}(O_1^{\beta,v} = +1) = \lim_{\beta \to +\infty} \frac{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} e^{\beta v(b)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{\beta v(b)} + e^{-\beta v(b)} \right]}.$$

- Calcule também

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}(O_1^{\beta,v} = -1).$$

- Suponha também que $O_1^{\beta,v} = +1$.
- $U_1^{\beta,v}$ também satisfaz a condição inicial?

Generalizando a Questão 14

- Vamos dizer que $v \in \mathcal{L}_N^+$ (conjunto das listas positivas de $\mathcal{S}_N$) se $v(a) \geq 0$, para todo $a \in \mathcal{A}_N$, e existe ao menos um ator b^v tal que $v(b^v) > 0$.
- Os QUIZes anterior podem ser generalizados da seguinte maneira:
- Se $v \in \mathcal{L}_N^+$, e

$$O_1^{\beta,v} = O_2^{\beta,v} = ... = O_n^{\beta,v} = +1,$$

então

$$U_1^{\beta,v} \in \mathcal{L}_N^+, \;\; U_2^{\beta,v} \in \mathcal{L}_N^+ \;\; ,..., \;\; U_n^{\beta,v} \in \mathcal{L}_N^+.$$

- Além disso,

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}(O_1^{\beta,v} = O_2^{\beta,v} = ... = O_n^{\beta,v} = +1) = +1.$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 15:**
- Lembramos que

$$\mathbb{P}(A_1^{\beta,v} = a) = \frac{e^{\beta v(a)} + e^{-\beta v(a)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{\beta v(b)} + e^{-\beta v(b)} \right]}.$$

- Vamos supor que $v \in \mathcal{L}_N^+$ e $v(N) > v(b)$, para todo $b \neq N$.
- Calcule

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}(A_1^{\beta,v} = N).$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 16:**
- Supondo que a lista inicial é $e^{(+1)}$, que valores tem que assumir

$$A_1^{\beta,e^{(+1)}}, A_2^{\beta,e^{(+1)}}, ..., A_N^{\beta,e^{(+1)}},$$

e

$$O_1^{\beta,e^{(+1)}}, O_2^{\beta,e^{(+1)}}, ..., O_N^{\beta,e^{(+1)}},$$

para que a trajetória da rede passe sucessivamente por todas as escadas

$$U_1^{\beta,e^{(+1)}} = e_{N-1}^{(+1)},$$
$$U_2^{\beta,e^{(+1)}} = e_{N-2}^{(+1)},$$
$$...,$$
$$U_N^{\beta,e^{(+1)}} = e_N^{(+1)}?$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 17:**
- Quanto vale

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(U_1^{\beta,e^{(+1)}} = e_{N-1}^{(+1)}, U_2^{\beta,e^{(+1)}} = e_{N-2}^{(+1)}, ..., U_N^{\beta,e^{(+1)}} = e^{(+1)})?$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 18:**
- Seja

$$p_n^{\beta,v}(a) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} U_m^{\beta,v}(a).$$

- Calcule

$$p_N^{+\infty,e^{(+1)}}(1).$$

- Calcule também

$$\lim_{n\to\infty} p_n^{+\infty,e^{(+1)}}(1).$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 19:**
- Para todo $u \in \mathcal{S}_N$, definimos

$$a_1(u) = \text{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A}\}.$$

Dado $v \in \mathcal{L}_N^+$, calcule

$$\lim_{\beta \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{n} \{A_m^{\beta,v} = a_1(U_{m-1}^{\beta,v})\} \right).$$

- Verifique que

$$\lim_{\beta \to \infty} \mathbb{P}(A_1^{\beta,e^{(+1)}} = N, O_1^{\beta,e^{(+1)}} = +1, ..., A_N^{\beta,e^{(+1)}} = 1, O_N^{\beta,e^{(+1)}} = +1) = 1.$$

Sugestão: Inspire-se nos QUIZes da Aula 20.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 20:**
- Calcule, para um instante $n \geq 0$ fixado,

$$\frac{1}{N} \sum_{a \in \mathcal{A}_N} U_n^{\beta,v}(a),$$

no caso $\beta = +\infty$ e $v = e^{(+1)}$.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 21:**
- Seja $v \in \mathcal{S}_N$ tal que $v(1) = 0$. Verifique a correção da fórmula

$$p_n^{0,v}(1) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}\{A_m \neq 1\} \sum_{i=L_m^1+1}^{m} O_i^0.$$

- Quanto vale $\lim_{n \to +\infty} p_n^{0,v}(1)$?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 22:**
- No caso $\beta = 0$, começando com uma lista inicial qualquer, quanto vale $\mathbb{E}(O_n^0)$?
- Verifique que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} O_j^{0,v}\right)\Big| A_1^{0,v} \neq a, ..., A_n^{0,v} \neq a\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} O_j^{0,v}\right)\right] = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left(O_j^{0,v}\right) = 0.$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 23:**
- No caso $\beta = \infty$, começando com uma lista inicial $v \in \mathcal{L}_N^+$,
- como evolui a lista de pressões sociais?
- Qual o valor de

$$\lim_{n\to\infty} p_n^{+\infty,v}(a)?$$

Sobre o modelo simples de mudança extrema

- Seja N um número inteiro estritamente positivo, e seja $\mathcal{Z}_N = \{-N, -N+1, ..., -1, 0, +1, ..., N-1, N\}$ o conjunto dos números inteiros entre $-N$ e N.
- Para todo $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, vamos definir a cadeia $(S_n^\lambda)_{n \geq 0}$ da seguinte maneira:
- Escolhemos S_0^λ arbitrariamente em $\mathcal{Z}_N$;
- para todo $n \geq 1$,

$$S_n^\lambda = S_{n-1}^\lambda + O_n^\lambda,$$

com a convenção $N + 1 = N$ e $-N - 1 = -N$.

Sobre o modelo simples de mudança extrema

- Os incrementos aleatórios O_n^λ satisfazem as seguintes condições:
- $O_n^\lambda \in \mathcal{O} = \{-1, +1\}$;
- as variáveis aleatórias $(O_n^\lambda)_{n\geq 1}$ são independentes entre si (mas não tem a mesma distribuição!);
- para todo $o \in \mathcal{O}$,

$$\mathbb{P}(O_n^\lambda = o | S_{n-1}^\lambda = z) = \frac{e^{\lambda o \text{ sinal}(z)}}{e^{\lambda \text{ sinal}(z)} + e^{-\lambda \text{ sinal}(z)}},$$

onde

$$\text{sinal}(z) = \begin{cases} +1, \text{ se } z > 0, \\ -1, \text{ se } z < 0, \\ 0, \text{ se } z = 0, \end{cases}$$

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 24:**
- Suponha que $z \neq 0$. Calcule

$$\mathbb{P}(O_n^\lambda = \text{sinal}(z) | S_{n-1}^\lambda = z)$$

  para λ positivo, negativo e nulo.
- O que esse cálculo nos ensina sobre a mudança de comportamento do sistema?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 25:**
- Calcule
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}(S^{\lambda}_{n+1} = z + 1 | S^{\lambda}_{n-1} = z),$$
no caso em que $z \geq 1$.
- Calcule
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}(S^{\lambda}_{n+1} = z - 1 | S^{\lambda}_{n-1} = z),$$
no caso em que $z \leq -1$.
- Calcule
$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathbb{P}(S^{\lambda}_{n+1} = z + 1 | S^{\lambda}_{n-1} = z),$$
no caso em que $z \geq 1$.
- Calcule
$$\lim_{\lambda \to -\infty} \mathbb{P}(S^{\lambda}_{n+1} = z - 1 | S^{\lambda}_{n-1} = z),$$
no caso em que $z \leq -1$.

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **Questão 26:**
- Definimos a pressão

$$p^\lambda = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} S_i^\lambda.$$

- Como varia p^λ em função do sinal e do valor absoluto de λ? Em particular, quanto você acha que vale $p^{+\infty}$, $p^{-\infty}$ e p^0?
- Quais são as diferenças observadas na evolução da cadeia $(S_n^\lambda)_{n\geq 0}$ nos casos em que $\lambda < 0$,$\lambda = 0$ e $\lambda > 0$?

Questões discutidas ao longo dos Módulos 4 e 5

- **A razão de todas estas questões:**
- O que esse modelo simples nos sugere a respeito da mudança de comportamento da rede social com pressão que estamos estudando?

Uma questão da maior importância

- Revendo as simulações das duas redes dadas no início da aula de hoje
- é possível saber se coeficiente de polarização β desta rede é grande ou pequeno?
- É possível saber se existe algum robô entre os atores desta rede?