Prova 3. MAE0499 Processos Estocásticos. 05/06/2019

NOME____N°USP_____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. Seja $\mathbf{P}$ a matriz de transições de uma cadeia de Markov

$\mathbf{P} = \left(p_{ij}, i, j = 0,1,2\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$. Classes de comunicação são:

a) $\{0,1,2\}$;
b) $\{0\}, \{1,2\}$;
c) $\{0,1\}, \{2\}$;
d) $\{0\}, \{1\}, \{2\}$;
e) $\{0,2\}, \{1\}$.

2. Seja Y_n uma sequencia de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso p, $Y_n \sim B(p)$. Criamos outra sequencia, X_n de forma recursiva: $X_0 \sim B(1/2)$, $X_n = \max(X_{n-1}, Y_n)$. Sabemos que X_n é cadeia de Markov, com conjunto de estados $E = \{0,1\}$, distribuição inicial α e matriz de transição $\mathbf{P} = \left(p_{ij}, i, j \in E\right)$ em que

a) $\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \mathbf{P} = (p_{11} = 1/2, p_{12} = 1/2, p_{21} = 0, p_{22} = 1)$;
b) $\alpha = (p, 1-p), \mathbf{P} = \left(p_{00} = \frac{1}{2}, p_{01} = \frac{1}{2}, p_{10} = 1-p, p_{11} = p\right)$;
c) $\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \mathbf{P} = (p_{00} = 1-p, p_{01} = p, p_{10} = 0, p_{11} = 1)$;
d) $\alpha = (1-p, p), \mathbf{P} = (p_{00} = 1/2, p_{01} = 1/2, p_{10} = 0, p_{11} = 1)$;
e) $\alpha = (p, 1-p), \mathbf{P} = \left(p_{00} = 1 - \frac{p}{2}, p_{01} = \frac{p}{2}, p_{10} = 0, p_{11} = 1\right)$.

3. Para matriz de transições $\mathbf{P} = \left(p_{ij}, i, j = 1,2\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, seja $p_{ij}^{(n)}$ a probabilidade de cadeia sair de estado i e estar em estado j depois de n passos. Escolha alternativa correta

a) $p_{11}^{(2)} = \frac{1}{3}$;
b) $p_{12}^{(2)} = \frac{4}{9}$;
c) $p_{11}^{(2)} = \frac{4}{9}$;
d) $p_{21}^{(2)} = \frac{1}{3}$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

4. Para matriz de transição do item anterior $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ achar a distribuição estacionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, se ela existe.

a) todas as distribuições do tipo $\pi_1 = x, \pi_2 = 1 - x, x \in [0,1]$ são distribuições estacionárias;
b) $\pi_1 = 1/2, \pi_2 = 1/2$;
c) $\pi_1 = 2/3, \pi_2 = 1/3$;
d) $\pi_1 = 1/3, \pi_2 = 2/3$;
e) a cadeia é redutível, por isso, não existe a distribuição estacionaria para essa cadeia.

5. X_n é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$: $X_{n+1} = X_n + 1$ com probabilidade p, e, $X_{n+1} = X_n - 1$ com probabilidade $q = 1 - p$. Supondo $X_0 = 1$, a probabilidade $P(X_4 = 1)$ é igual

a) $6p^2(1-p)^2$;
b) $2p^1(1-p)^3$;
c) $2p^3(1-p)^1$;
d) $4p^2(1-p)^2$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

6. A Maria joga melhor de que João. Chance de ganhar numa jogada para Maria é 4 contra 1. Eles tem em total 5 reais. Jogador ganha o jogo se ele fica com todo dinheiro e depois disso o jogo termina. Em uma jogada aposta-se somente um real. Para igualar as chances de ganhar o jogo a banca do João ficou com 4 reais quando a Maria ficou com 1 real. Com a esta divisão

a) as chances de ganhar o jogo são iguais;
b) Maria ganha o jogo com probabilidade menor de que 0.5;
c) com 70% a Maria ganha o jogo;
d) Maria ganha o jogo com probabilidade menor de que 0.7, mas maior de que 0.5;
e) Maria ganha o jogo com probabilidade maior que 0.7.

7. Seja X_n uma cadeia de Markov com conjunto de estados $E = \{0,1,2\}$, e com seguintes probabilidades de transição: $p_{01} = p_{21} = 2/3$, $p_{00} = p_{22} = 1/3$ e $p_{10} = p_{12} = 1/2$. Achar $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$, a medida invariante deste processo. A cadeia é reversível?

a) reversível, e $\pi_0 = \frac{3}{5}, \pi_0 \neq \pi_2$;
b) não reversível, e $\pi_0 = \pi_2 = \frac{1}{5}$.
c) reversível, e $\pi_0 = \pi_2 = \frac{3}{10}$;
d) não reversível porque $p_{01} \neq 0$, e $\pi_0 = \frac{3}{5}$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

8. Consideramos a cadeia X_n do item 7 anterior. Escolha alternativa correta:

a) a cadeia é redutível e periódica;
b) o estado 0 é transitório, estado 1 é recorrente, estado 2 é transitório;
c) a cadeia é irredutível e aperiódica;
d) a cadeia é transitória, ou seja, todos os estados dela são transitórios;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

9. Seja X_n a cadeia do item 7. Consideramos seguinte sequencia Y_n: $Y_n = 0$ se $X_n = 0$ ou $X_n = 2$, e $Y_n = 1$ se $X_n = 1$. Escolha alternativa correta:

a) Y_n não forma cadeia de Markov;
b) Y_n é cadeia de Markov com matriz de transição $\mathbf{P} = \left(p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{4}{3}, p_{10} = \frac{1}{2}, p_{11} = \frac{1}{2}\right)$;
c) Y_n é cadeia de Markov com matriz de transição $\mathbf{P} = \left(p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{2}{3}, p_{10} = 0, p_{11} = 1\right)$;
d) Y_n é cadeia de Markov com matriz de transição $\mathbf{P} = \left(p_{00} = \frac{2}{3}, p_{01} = \frac{1}{3}, p_{10} = \frac{1}{2}, p_{11} = \frac{1}{2}\right)$;
e) Y_n é cadeia de Markov com matriz de transição $\mathbf{P} = \left(p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{2}{3}, p_{10} = 1, p_{11} = 0\right)$.

10. Uma cadeia X_n quando está no estado $i \in \{1, 2, \dots\} =: \mathbb{N}$ com probabilidade $\frac{1}{3}$ pula para o estado $i + 1$ e com probabilidade $\frac{2}{3}$ vai para o estado $i - 1$. Se a cadeia está no estado 0, com a probabilidade $\frac{1}{3}$ ela pula para estado 1, e permanece no mesmo estado com probabilidade $\frac{2}{3}$. Sabe-se que a cadeia é reversível. A sistema de equações correspondente para medida invariante $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ e a solução são

a) a cadeia é transitória, por isso não há medida invariante, ou seja todos $\pi_i = 0$, $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
b) $\pi_i = 3\pi_{i+1}/2, i \in \mathbb{N}, \pi_0 = \pi_1$, assim $\pi_0 = \frac{1}{2}, \pi_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i, i \in \mathbb{N}$;
c) $\pi_i = 2\pi_{i+1}/3, i \in \mathbb{N}, 3\pi_0 = 2\pi_1$, assim $\pi_0 = \frac{1}{4}, \pi_i = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{i+3}, i \in \mathbb{N}$;
d) $\pi_i = 2\pi_{i+1}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, assim $\pi_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

Algumas fórmulas úteis.

Medidas invariantes
seja $\pi = (\pi_i, i \in E)$ medida invariante então $\pi_i = \sum_{k \in E} \pi_k p_{ki}$; cadeia é reversível se $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ para $i \neq j \in E$ quaisquer.

Ruína de jogador

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, se\ p \neq \dfrac{1}{2}, \\ \quad \dfrac{i}{N}, \quad se\ p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

NOME____NºUSP_____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	X				X				

1. Seja $\mathbf{P}$ matriz de transições de uma cadeia de Markov com estados $E = \{0,1,2,3\}$. Escolha alternativa correta sobre as classes de comunicação e desenha ao lado o grafo de transição.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

a) $\{0,1,2,3\}$, cadeia é irredutível;
b) $\{0\}, \{1,2\}, \{3\}$, cadeia não é irredutível;
c) $\{0,1\}, \{2,3\}$, cadeia não é irredutível;
d) $\{0\}, \{1\}, \{2,3\}$, cadeia não é irredutível;
e) $\{0,2\}, \{1,3\}$, cadeia não é irredutível.

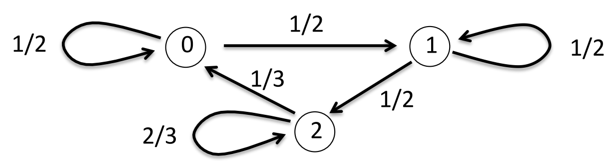
2. Dois navios atiram um para o outro instantaneamente em intervalos regulares. Para cada troca de tiros, o navio A atinge o navio B com uma probabilidade de 1/2 e o navio B atinge o navio A com uma probabilidade de 3/8. Supõe-se que, com qualquer acerto, o navio trava. Os resultados de uma série de disparos são considerados. Encontre a matriz de probabilidade de transição se os estados da cadeia forem combinações de navios que permanecem em serviço: "0"- ambos os navios em serviço, "1" - só navio A em serviço, "2" - só navio B em serviço, "3" os dois navios são atingidos.

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

3. X_n é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$: $X_{n+1} = X_n + 1$ com probabilidade p, e, $X_{n+1} = X_n - 1$ com probabilidade $q = 1 - p$. Supondo $X_0 = 1$, a probabilidade $P(X_4 = 1)$ é igual

a) $6p^2(1-p)^2$;
b) $2p^1(1-p)^3$;
c) $2p^3(1-p)^1$;
d) $4p^2(1-p)^2$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

4. Para cadeia de Markov representada pelo seguinte grafo de transição achar a distribuição estacionária $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$, se ela existe.



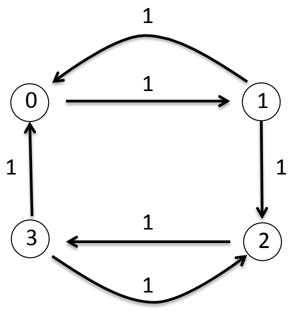
a) todas as distribuições do tipo $\pi_1 = x, \pi_2 = 1 - 2x, x \in [0,1]$ são distribuições estacionárias;
b) $\pi_1 = 2/7, \pi_2 = 3/7$;
c) $\pi_1 = 1/3, \pi_2 = 1/3$;
d) $\pi_1 = 1/5, \pi_2 = 2/5$;
e) a cadeia é redutível, por isso, não existe a distribuição estacionaria para essa cadeia.

5. A Maria joga melhor de que João. Seja p a probabilidade de Maria ganhar uma jogada. Maria está com 1 real e João com 2 reais. Achar o valor de p que iguala as chances de ganhar jogo.

a) $p = 1/(2(\sqrt{5} - 1))$;
b) $p = 2/(\sqrt{5} + 1)$;
c) $p = 1/(\sqrt{5} - 1)$;
d) $p = 1/(\sqrt{5} + 1)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

6. O jogo do item anterior consideramos em tempo contínuo de seguinte forma: antes de fazer a jogada a Maria pensa durante um tempo exponencial com parâmetro λ_M e só depois faça uma jogada, enquanto o João pensa durante um tempo exponencial com taxa λ_J. Sugere e desenha um grafo de transição para essa cadeia com tempo contínuo com respectivas taxas de transição ($\Lambda = (\lambda_{ij})$) descritos em termos de p, λ_M e λ_J.

7. Seja X_t uma cadeia de Markov com tempo contínuo representado pelo grafo de transição:



Achar $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$, a medida invariante deste processo. A cadeia é reversível?

a) não reversível, $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$;
b) não reversível, $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$;
c) reversível, $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$;
d) não reversível, $\pi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

8. Consideramos a cadeia X_t do item 7 anterior. A equação de Kolmogorov *backward* para a probabilidade $p_{01}(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

a) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = p_{11}(t) - p_{01}(t)$;
b) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = p_{01}(t) - p_{11}(t)$;
c) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = p_{11}(t)$;
d) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = -p_{01}(t)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

9. Consideramos a cadeia X_t do item 7 anterior. A equação de Kolmogorov *forward* para a probabilidade $p_{01}(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

a) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = p_{11}(t) - p_{01}(t)$;
b) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = p_{01}(t) - p_{11}(t)$;
c) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = p_{11}(t)$;
d) $\frac{d}{dt} p_{01}(t) = -p_{01}(t)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

10. Considere o processo de nascimento "puro" (processo Yule) com taxas de transição $\lambda_n = n\lambda$ e com conjunto de estado $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$. Escolha alternativa correta.

a) $p_{11}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$;
b) $p_{11}(t) = e^{-\lambda t}$;
c) $p_{11}(t) = 1 - \lambda e^{-2\lambda t}$;
d) $p_{11}(t) = e^{-\lambda t} - \lambda e^{-2\lambda t}$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

Algumas fórmulas úteis.

Medidas invariantes

1. *caso discreto:* seja $\pi = (\pi_i, i \in E)$ medida invariante então $\pi_i = \sum_{k\in E} \pi_k p_{ki}$; cadeia é reversível se $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ para $i \neq j \in E$ quaisquer.

2. *caso contínuo:* seja $\pi = (\pi_i, i \in E)$ medida invariante então $v_j \pi_j = \sum_{k\neq j} \pi_k q_{kj}$; cadeia é reversível se $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$ para $i \neq j \in E$ quaisquer.

Probabilidade de ruína de jogador

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, se\ p \neq 1/2 \\ \dfrac{i}{N}, \quad se\ p = 1/2 \end{cases}$$

Equação de Kolmogorov *backward*:

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Equação de Kolmogorov *forward*:

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - v_j P_{ij}(t)$$