PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas
02/12/2020

1. Discorra (máximo 10 linhas) sobre a utilização da integral de Duhamel para obter a resposta no domínio do tempo para sistemas lineares com amortecimento proporcional (Rayleigh) **com vários graus de liberdade**.

2. Considere o modelo estrutural representado na Figura 1, constituído por quatro barras rígidas biarticuladas e imponderáveis de comprimento ℓ, transversalmente ligadas a molas elásticas lineares de rigidez k e amortecedores viscosos lineares de constante c. Nas articulações intermediárias há massas concentradas m e aplicam-se forças axiais P no sentido indicado. O conjunto está submetido a uma protensão T, também conforme a figura. Os graus de liberdade são os deslocamentos horizontais (q_1, q_2, q_3), adimensionalizados em relação a ℓ. São conhecidos: $m = 1kg$, $c = 0{,}4Ns/m$, $k = 1N/m$; $\ell = 1m$. Dados específicos:

   i. Prova do Grupo 1: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}05$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}05$
   ii. Prova do Grupo 2: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}10$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}10$
   iii. Prova do Grupo 3: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}15$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}15$
   iv. Prova do Grupo 4: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}20$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}20$
   v. Prova do Grupo 5: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}25$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}25$

A equação matricial de movimento do sistema linearizado pode ser escrita na forma:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{R\}$$

com $[M] = m\ell^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[C] = c\ell^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas
02/12/2020

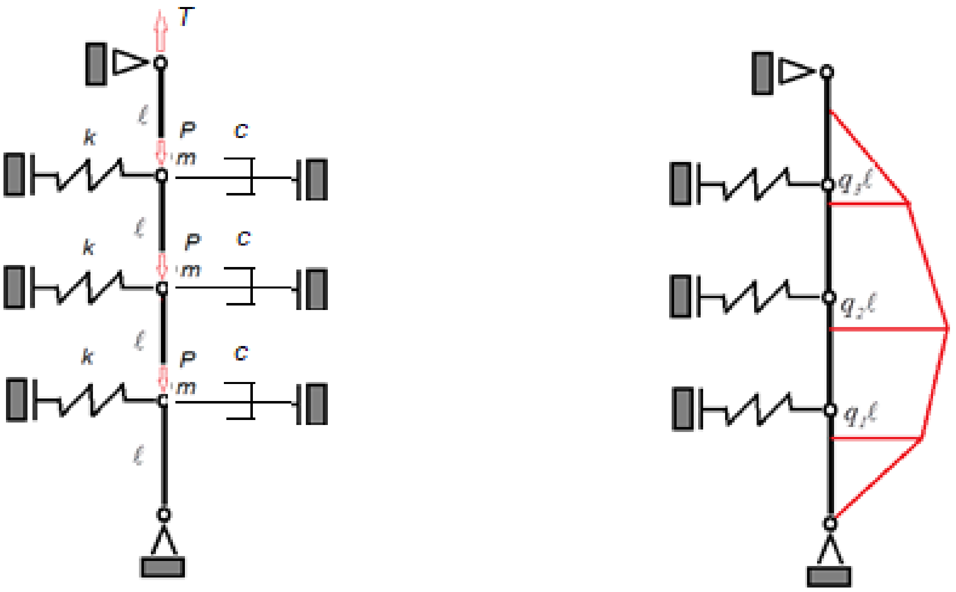

Figura 1 - Sistema estrutural

Considerando que a matriz de rigidez pode ser obtida como subproduto da equação de Lagrange – $\frac{\partial V}{\partial q} = [K]\{q\}$ – e que pode ser escrita na forma $[K] = k\ell^2 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$, forneça os valores de k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{21}, k_{31} e k_{32}.

Atenção: não se esquecer do efeito das forças axiais *T* e *P* na matriz de rigidez!!!

3. Para o modelo da Figura 1, considerando que o vetor de carregamento é dado por $\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}$, forneça os valores de R_1, R_2 e R_3.

4. Para o modelo da Figura 1, obter os modos de vibração e as frequências naturais NÃO AMORTECIDAS do sistema, informando:
   i. a MENOR frequência ω_1
   ii. o correspondente vetor modal na forma $\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix}$
   iii. a frequência intermediária ω_2

PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas
02/12/2020

iv. o correspondente vetor modal na forma $\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix}$

v. a MAIOR frequência ω_3

vi. o correspondente vetor modal na forma $\phi_3 = \begin{Bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ 1 \end{Bmatrix}$

5. Para o modelo da Figura 1, obter os modos de vibração e as frequências naturais AMORTECIDAS do sistema, informando:
   i. a MENOR frequência ω_{1D}
   ii. o correspondente vetor modal na forma $\phi_{1D} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21,D} \\ \phi_{31,D} \end{Bmatrix}$
   iii. a frequência intermediária ω_{2D}
   iv. o correspondente vetor modal na forma $\phi_{2D} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{22,D} \\ \phi_{32,D} \end{Bmatrix}$
   v. a MAIOR frequência ω_{3D}
   vi. o correspondente vetor modal na forma $\phi_{3D} = \begin{Bmatrix} \phi_{31,D} \\ \phi_{32,D} \\ 1 \end{Bmatrix}$

6. Para o modelo da Figura 1, conhecendo-se as matrizes de massa $[M]$, amortecimento $[C]$ e rigidez $[K]$, e o vetor de forças $\{R\}$, pode-se obter o sistema de equações de movimento de primeira ordem no formato $\{\dot{y}\} = [A]\{y\}$, em que $\{y\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix}$, com a matriz $[A]$ parcialmente preenchida $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}$. Forneça os valores de A_{41}, A_{42}, A_{52}, A_{53}, A_{55} e A_{63}.

PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas
02/12/2020

7. Para o sistema $\{\dot{y}\} = [A]\{y\}$, referente ao modelo da Figura 1, sendo $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}$, determinar pelo Método de Runge-Kutta a solução $y_3(t)$ no instante a seguir indicado:

   i. Prova do Grupo 1: em $t = 6{,}252s$, considerando como condições iniciais

$$\{y(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

   ii. Prova do Grupo 2: em $t = 6{,}103s$, considerando como condições iniciais

$$\{y(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

   iii. Prova do Grupo 3: em $t = 5{,}964s$, considerando como condições iniciais

$$\{y(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

   iv. Prova do Grupo 4: em $t = 5{,}834s$, considerando como condições iniciais

$$\{y(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

   v. Prova do Grupo 5: em $t = 5{,}712s$, considerando como condições iniciais

$$\{y(0)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se desejar, use a ferramenta Matlab para integração, disponibilizada no Moodle, usando a função ODE45.

PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas
02/12/2020

8. Para um NOVO CENÁRIO do modelo da Figura 1, em que são ALTERADOS os valores de $\theta = \frac{T}{k\ell}$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell}$, mantendo-se todos os demais valores de parâmetros, estudar a estabilidade do sistema $\{\dot{y}\} = [A]\{y\}$ pelo Primeiro Método de Lyapunov.

   i. Prova do Grupo 1: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}40$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}40$
   ii. Prova do Grupo 2: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}45$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}45$
   iii. Prova do Grupo 3: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}50$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}50$
   iv. Prova do Grupo 4: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}55$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}55$
   v. Prova do Grupo 5: $\theta = \frac{T}{k\ell} = 0{,}60$ e $\sigma = \frac{P}{k\ell} = 0{,}60$

Escolha a alternativa adequada:

(a) o sistema é estável, segundo o Teorema 1 de Lypunov;
(b) o sistema é instável, segundo o Teorema 2 de Lyapunov;
(c) o sistema é estável, segundo o Teorema 3 de Leipholz;
(d) o sistema é instável, segundo o Teorema 3 de Leipholz.

Se desejar, use a ferramenta Matlab disponibilizada no Moodle, para resolver o problema de autovalores/autovetores.

9. A Figura 2 ilustra um sistema estrutural de uma coluna vertical rígida de comprimento L, contraventada por uma barra biarticulada de rigidez k formando ângulo de 45º com a horizontal.

   i. Prova do Grupo 1: $L = 3{,}6m$ e $k = 1{,}0 \times 10^5 N/m$
   ii. Prova do Grupo 2: $L = 3{,}2m$ e $k = 1{,}2 \times 10^5 N/m$
   iii. Prova do Grupo 3: $L = 2{,}8m$ e $k = 1{,}4 \times 10^5 N/m$
   iv. Prova do Grupo 4: $L = 2{,}4m$ e $k = 1{,}6 \times 10^5 N/m$
   v. Prova do Grupo 5: $L = 2{,}0m$ e $k = 1{,}8 \times 10^5 N/m$

   O sistema está submetido a uma força vertical conservativa P, conforme indicado na figura. Considere o grau de liberdade u adimensional, correspondente ao deslocamento horizontal uL do ponto de aplicação da carga.

PEF 5916 – Dinâmica e Estabilidade das Estruturas
02/12/2020

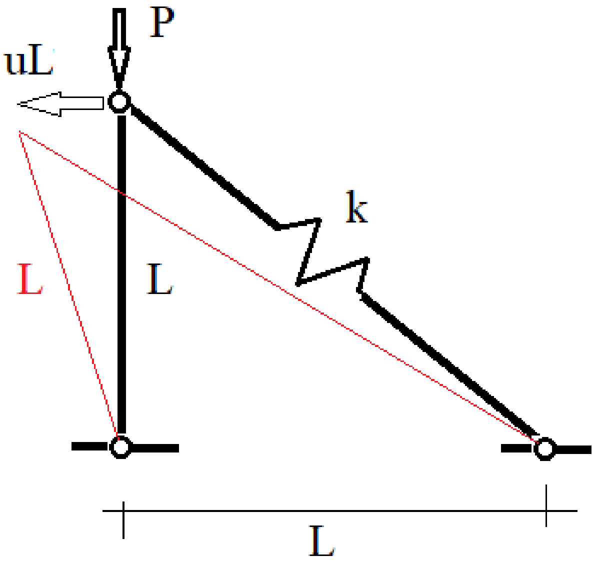

Figura 2: sistema estrutural

a) Utilizando o Método Energético da Teoria da Estabilidade Elástica, obtenha a carga crítica P_{cr} do sistema em Newton (N).

b) Ainda sobre o sistema da Figura 2, classificar o tipo de instabilidade elástica:

   I. bifurcação simétrica estável;
   II. bifurcação simétrica instável;
   III. bifurcação assimétrica;
   IV. ponto limite.

c) A carga crítica do sistema da Figura 2 é sensível a imperfeições?

   I. Não;
   II. Sim.

10. Discorra (máximo 10 linhas) sobre como justificar o Método Energético da Teoria da Estabilidade Elástica segundo a definição de estabilidade de Lyapunov.