b) Comparação de Médias com base em amostras independentes

Neste caso, dispomos de duas amostras independentes (unidades amostrais distintas e não relacionadas)

$X_1, X_2 \dots X_{n_1}$ amostra de tamanho n_1 da pop 1

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

$Y_1, Y_2 \dots Y_{n_2}$ amostra de tamanho n_2 da pop 2

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Teste de Hipóteses Bicaudal

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_X \neq \mu_Y$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X^2}{n_1}\right) \\ \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y^2}{n_2}\right)\end{array}\right\} \text{independentes}$$

$$E(\bar{Y}-\bar{X}) = \mu_X - \mu_Y$$

$$Var(\bar{Y}-\bar{X}) \underset{\text{indep.}}{=} Var(\bar{Y}) + Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_Y^2}{n_2} + \frac{\sigma_X^2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \bar{Y}-\bar{X} \sim N\left(\mu_Y-\mu_X, \frac{\sigma_Y^2}{n_2} + \frac{\sigma_X^2}{n_1}\right)$$

Sob H_0, $\mu_X = \mu_Y$ e se σ_X^2 e σ_Y^2 são conhecidos

b1

$$Z = \frac{\bar{Y}-\bar{X}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_Y^2}{n_2} + \dfrac{\sigma_X^2}{n_1}}} \sim N(0,1)$$

Rejeita-se H_0 se $Z \geq z_c$ ou $Z \leq -z_c$

z_c tal que $P(Z \geq z_c) = \dfrac{\alpha}{2}$ $\quad Z \sim N(0,1)$

Teste Unicaudal

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_Y > \mu_X$

RC: $Z \geq z_c$ $\quad P(Z \geq z_c) = \alpha \quad Z \sim N(0,1)$

---

b2) Se σ_X^2 e σ_Y^2 são desconhecidos, sob $H_0: \mu_X = \mu_Y$, utiliza-se a estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{S_Y^2}{n_2} + \frac{S_X^2}{n_1}}}$$

S_X^2 e S_Y^2 variâncias amostrais associadas às amostras das v. X e Y respectivamente

Sob H_0, $T \sim t_K$ onde

$$K = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_Y^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

As regiões críticas e a execução dos testes são similares ao caso anterior.

Se K não for um valor inteiro, arredondar para o inteiro mais próximo.

Para testar

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_X \neq \mu_Y$

Rejeita-se H_0 se $T \geq t_c$ ou $T \leq -t_c$

t_c tal que $P(T \geq t_c) = \frac{\alpha}{2}$ $T \sim t_K$

Dist. t-student com K g.l.

Teste Unicaudal

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_Y > \mu_X$

RC: $T \geq t_c$ $P(T \geq t_c) = \alpha$

$T \sim t_K$

↳ Dist. t-student com K g.l.

b3) Se σ_X^2 e σ_Y^2 são desconhecidos mas pudermos considerar $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, utiliza-se a estatística de teste

$$T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{S_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

S_c^2 estimativa da variância comum

$$S_c^2 = \frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2}{n_1+n_2-2}$$

Sob H_0, $T \sim t_{n_1+n_2-2}$

Teste de Hipóteses Bicaudal

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_X \neq \mu_Y$

Rejeita-se H_0 se $T \geq t_c$ ou $T \leq -t_c$

t_c tal que $P(T \geq t_c) = \frac{\alpha}{2}$, $T \sim t_{n_1+n_2-2}$

Teste Unicaudal

$H_0: \mu_Y = \mu_X$

$H_a: \mu_Y > \mu_X$

Rejeita-se H_0 se $T \geq t_c$, $P(T \geq t_c) = \alpha$

$T \sim t_{n_1+n_2-2}$

Resumo dos Quatro Casos:

Tabela 9.1 pág. 325 Magalhães e Lima

Exemplos

1- Exemplo 9.4 - Magalhães e Lima - pag 314

Comparação dos dois sistemas operacionais de computador: Convencional e Novo.

Faz sentido testar que o tempo médio de realização da tarefa para a população de alunos sujeitos ao método convencional seja maior que para o método novo (o método novo é mais eficiente).

X - tempo de realização da tarefa para a população dos alunos sujeitos ao sistema novo.

Y - tempo " " " sistema convencional

Suposições

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $\quad \sigma_X^2 = 80 \quad \sigma_Y^2 = 100$

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\quad \mu_X$ e μ_Y desconhecidos

$\Rightarrow$ Caso b-1

$H_0: \mu_Y = \mu_X$ sistemas equivalentes

$H_a: \mu_Y > \mu_X$ sistema novo é superior (reduz o tempo médio de realização da tarefa)

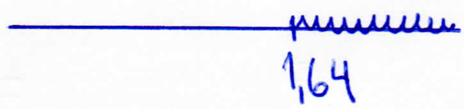
Sistema	Tempo
Convencional	182 185 193 175 184 192 175 173 186 178 162 179 164 182 186
Novo	92 76 76 90 97 90 86 93 100 115 85 80 90 86 94

$n_1 = n_2 = 15$

$$Z = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_2} + \frac{\sigma_X^2}{n_1}}}$$ estatística de teste

RC: $Z \geqslant z_c \quad P(Z \geqslant z_c) = \alpha \quad Z \sim N(0,1)$

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_c = 1{,}64$



$\bar{y}_{obs} = 179{,}73 \qquad \bar{x}_{obs} = 89{,}86$

$$z_{obs} = \frac{179{,}73 - 89{,}96}{\sqrt{\frac{100}{15} + \frac{80}{15}}} = \frac{89{,}77}{3{,}464} = 25{,}915 \in RC$$

Rejeita-se H_0. Os dados sugerem que o tempo médio de realização da tarefa no sistema novo é inferior.

$\alpha^* = $ p-valor $= P(Z \geqslant z_{obs}) = P(Z \geqslant 25{,}915) = 0$

$\Rightarrow$ Rejeitaria-se H_0 para qualquer α.

2 - Exemplo

Deseja-se testar a igualdade de médias das resistências de dois tipos de vigas A e B. Admite-se que nos dois casos, a variável resistência tem distribuição normal com variâncias desiguais. Tomando-se amostras de $n_1 = 15$ vigas do tipo A e $n_2 = 20$ vigas do tipo B obteve-se

Tipo	média amostral	variância amostral
A	70,5	81,6
B	84,3	120,5

Testar a hipótese de interesse ao nível $\alpha = 0{,}05$.

X - resistência das vigas do tipo A
Y - resistência das vigas do tipo B

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $\quad$ σ_X^2 e σ_Y^2 desconhecidos

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\quad$ $\Longrightarrow$ Caso b2

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_X \neq \mu_Y$

$\bar{x}_{obs} = 70{,}5 \qquad S_X^2 = 81{,}6$

$\bar{y}_{obs} = 84{,}3 \qquad S_Y^2 = 120{,}5$

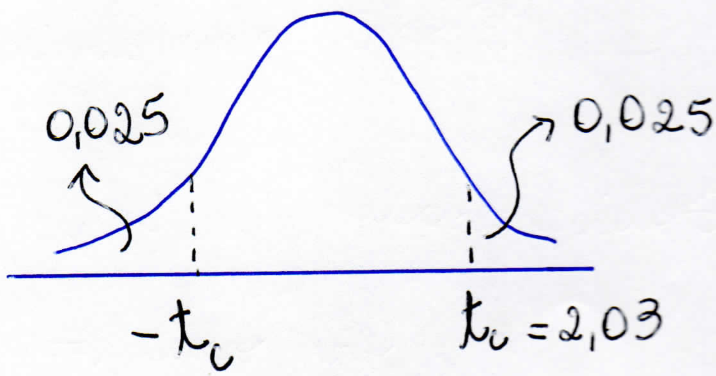
$$k = \frac{\left(\frac{81{,}6}{15} + \frac{120{,}5}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{81{,}6}{15}\right)^2}{14} + \frac{\left(\frac{120{,}5}{20}\right)^2}{19}} = \frac{131{,}45}{2{,}11 + 1{,}91} = 32{,}7$$

$\simeq 33$ g.l.

$$T = \frac{70{,}5 - 84{,}3}{\sqrt{\frac{81{,}6}{15} + \frac{120{,}5}{20}}} = \frac{-13{,}8}{3{,}386} = -4{,}075$$

RC: $T \leq -t_c$ ou $T \geq t_c$

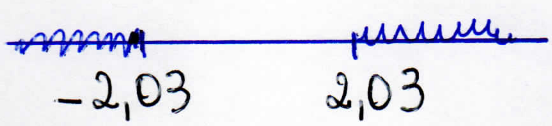
Usando 35 gl



$\alpha = 0{,}05$

$t_c = 2{,}03$

RC:



$T_{obs} = -4{,}075$

$T_{obs} \in RC$. Rejeita-se H_0. Os dados sugerem desigualdade das resistências médias nos dois tipos de vigas.

3- Exemplo

Deseja-se comparar a durabilidade de amortecedores fabricados pelas empresas A e B. O teste realizado com uma amostra da produção de cada empresa apresentou as seguintes medidas para cada peça

Empresa A	115	123	134	120	121
Empresa B	125	126	120	130	128

Admitindo que a variável durabilidade tem distribuição normal e que as variâncias são iguais para as duas empresas, teste a hipótese de igualdade das durabilidades médias, ao nível de 2%.

X - durabilidade dos amortecedores da empresa A

Y - durabilidade dos amortecedores da empresa B

$X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ $\quad$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$

σ^2 desconhecido $\quad$ Caso b3

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_X \neq \mu_Y$

Cálculos

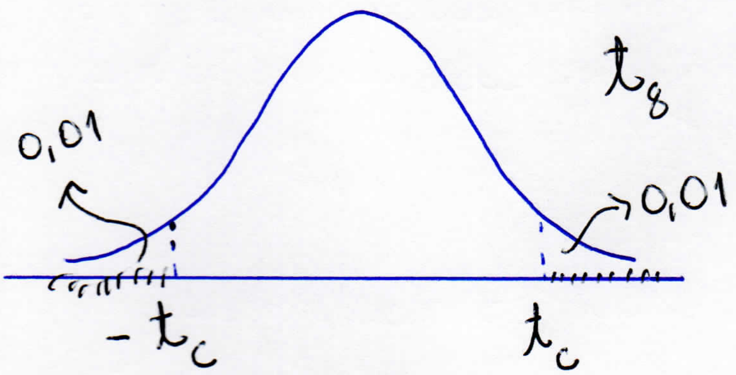
$$\bar{x} = \frac{613}{5} = 122{,}6 \qquad \bar{y} = \frac{629}{5} = 125{,}8$$

$$\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5(\bar{x})^2 = 75\,351 - 5(122{,}6)^2 = 197{,}2$$

$$\sum_{i=1}^{5} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 - 5(\bar{y})^2 = 79185 - 5(125{,}8)^2 = 56{,}8$$

$$S_c^2 = \frac{197{,}2 + 56{,}8}{8} = 31{,}75$$

$$T_{obs} = \frac{122{,}6 - 125{,}8}{\sqrt{31{,}75\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}} = \frac{-3{,}2}{3{,}56} = -0{,}898$$



$t_c = 2{,}896$

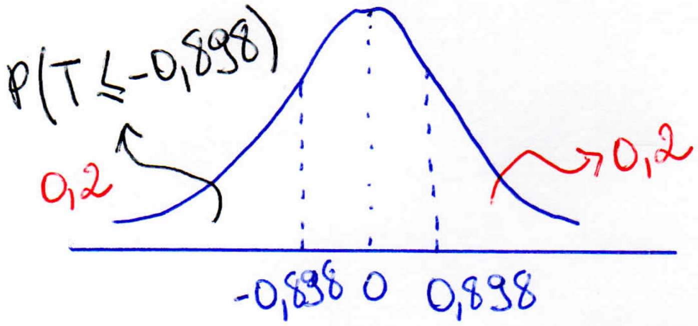
RC : $T \leq -2{,}896$ ou $T \geq 2{,}896$

$T_{obs} = -0{,}617 \notin RC$. Não rejeitamos Ho. Os dados sugerem que a durabilidade média é a mesma para as duas empresas.

Obs:

1- Nível descritivo

$$\alpha^* = 2\,P(T \leq -0{,}898) \qquad T \sim t_8$$



40% → Soma das Caudas

8 0,889

$\therefore\ \alpha^* = 0{,}4$ Só rejeitaríamos H_0 para $\alpha \geqslant 0{,}4$, o que não é usual.

2- Intervalo de Confiança para $\mu_Y - \mu_X$

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - t_c\sqrt{S_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\ ;\ \bar{Y} - \bar{X} + t_c\sqrt{S_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

t_c tal que $P(-t_c \leq T \leq t_c) = \gamma$

$T \sim t_{n_1+n_2-2}$ $\qquad \gamma$ - coeficiente de confiança

No exemplo, para $\gamma = 0{,}96$

$$125{,}8 - 122{,}6 \pm 2{,}449 \sqrt{31{,}75\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}$$

$$3{,}2 \pm 2{,}449 . 3{,}56$$

$$3{,}2 \pm 8{,}72 \rightarrow [-5{,}52 ; 11{,}92]$$

0,04
⋮
8 ---- 2,449