

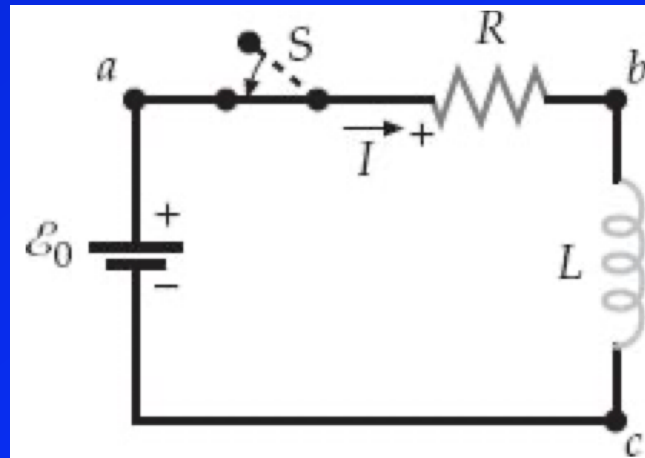
28-7 Energia magnética

Considere o circuito da figura que possui um indutor ideal de indutância L e um resistor que tem resistência R , em série com uma bateria ideal que tem fem \mathcal{E}_0 e com uma chave S . A chave está inicialmente aberta e, não havendo corrente no circuito.

Um instante após a chave ter sido fechada, haverá uma corrente I no circuito, uma diferença de potencial $-IR$ no resistor e uma diferença de potencial $-L \, dI/dt$ no indutor

(vimos na aula passada que $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$).

Assim, para um indutor ideal, a diferença de potencial no indutor é igual à fem reversa e, portanto



$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Multiplicando a última equação do slide anterior pela corrente I e reorganizando os termos, temos

$$\mathcal{E}_0 I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

**onde $\mathcal{E}_0 I$ é a taxa de fornecimento de energia elétrica pela bateria;
o termo $I^2 R$ é a taxa de gasto de energia no resistor
(esta também é a taxa de dissipação de energia pelo resistor);
o termo $LI \frac{dI}{dt}$ é a taxa de energia entregue ao indutor e,
se U_m é a energia armazenada no indutor, então**

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt} \quad \text{ou} \quad dU_m = LI dI$$

Integrando essa equação, obtemos

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 + C$$

onde C é uma constante de integração.

Retomando a última equação do slide anterior

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 + C$$

para calcular C , consideramos U_m igual a zero quando I for zero.

Assim, energia armazenada em um indutor conduzindo uma corrente I é

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2$$

Quando uma corrente é produzida em um indutor, um campo magnético é criado na região interna e externa dele.

A energia armazenada em um indutor é a energia armazenada neste campo magnético.

A seguir, veremos o caso particular de um solenoide longo e fino.

No caso de um solenoide longo e fino,
a intensidade do campo magnético é zero fora dele e,
no seu interior é dada por

$$B = \mu_0 n I \quad (\text{ou } I = \frac{B}{\mu_0 n})$$

e a auto-indutância de um solenoide longo e fino é dada por

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

onde A é a área da seção transversal e ℓ é o comprimento.

Assim, sendo $U_m = \frac{1}{2} L I^2$, temos

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 A \ell) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell$$

mas a quantidade $A \ell$ é o volume do espaço no interior do solenoide
contendo o campo magnético, assim,
a densidade de energia magnética u_m
(energia por unidade de volume) é

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Embora tenhamos deduzido esta expressão considerando o caso especial do campo magnético em um longo solenoide, este é um resultado geral.

Sempre que existir um campo magnético no espaço, a energia magnética por unidade de volume será dada por

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

É interessante observar a similaridade com o caso do campo elétrico, a densidade de energia em uma região onde existe um campo elétrico é dada por (Cap 24)

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Exemplo 28-11 Densidade de energia eletromagnética

Em uma região do espaço tem
um campo magnético uniforme de 0,0200 T e
um campo elétrico uniforme de $2,50 \times 10^6$ N/C.

Determine (a) a densidade de energia eletromagnética total na região
e (b) a energia em uma caixa cúbica de lado $\ell = 12,0$ cm.

A densidade total de energia u é a soma das densidades de energia
elétrica e magnética, $u = u_e + u_m$.

A energia em um volume é dada por $= uV$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_e &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ &= \frac{1}{2} (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) (2,50 \times 10^6 \text{ N/C})^2 \\ &= 27,7 \text{ J/m}^3 \\ u_m &= \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0,0200 \text{ T})^2}{2(4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)} = 159 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

$$u = u_e + u_m = 27,7 \text{ J/m}^3 + 159 \text{ J/m}^3 = \boxed{187 \text{ J/m}^3}$$

Exemplo 28-11 Densidade de energia eletromagnética

Em uma região do espaço tem
um campo magnético uniforme de 0,0200 T e
um campo elétrico uniforme de $2,50 \times 10^6$ N/C.

Determine (a) a densidade de energia eletromagnética total na região
e (b) a energia em uma caixa cúbica de lado $\ell = 12,0$ cm.

A densidade total de energia u é a soma das densidades de energia
elétrica e magnética, $u = u_e + u_m$.

A energia em um volume é dada por $U = uV$.

(b) $U = uV = u\ell^3 = (187 \text{ J/m}^3)(0,120 \text{ m})^3 = 0,323 \text{ J}$

Capítulo 30 do Tipler (6ª edição)
Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

As equações de Maxwell, propostas pelo físico escocês James Clerk Maxwell, relaciona os vetores campo elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} e suas fontes, que são as cargas elétricas e as correntes.

As equações de Maxwell desempenham um papel no eletromagnetismo clássico análogo ao papel das leis de Newton na mecânica clássica.

Maxwell mostrou que

suas equações podem ser combinadas para fornecer uma equação de onda para os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} .

Tais ondas eletromagnéticas são geradas por cargas aceleradas (por exemplo, as cargas em uma corrente alternada em uma antena). Maxwell mostrou que suas equações preveem a velocidade das ondas

eletromagnéticas no espaço livre

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

onde ϵ_0 , a constante elétrica, é a constante que aparece nas leis de Coulomb e de Gauss, e μ_0 , a constante magnética, é a constante que aparece na lei de Biot–Savart e na lei de Ampère. Maxwell observou com surpresa a coincidência que a medida para a velocidade da luz fosse igual a $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, e Maxwell, ainda sem comprovação, supôs corretamente que a luz fosse uma onda eletromagnética.

Atualmente, o valor de c é definido como $2,997\,924\,58 \times 10^8$ m/s, o valor de μ_0 é definido como $4\pi \times 10^{-7}$ N/A², e o valor de ϵ_0 é definido por $1/\mu_0 c^2$.

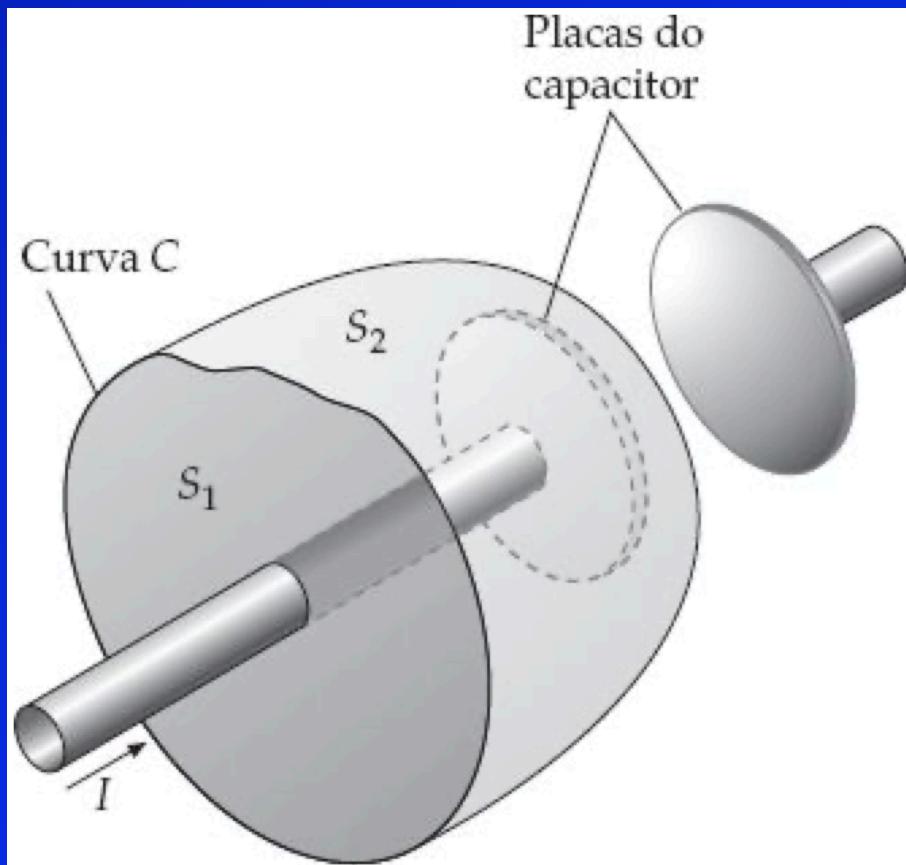
A lei de Ampère (vista no Cap. 27) relaciona a integral de linha do campo magnético ao longo de alguma curva fechada C à corrente que passa através de qualquer superfície limitada por tal curva

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_S$$

Maxwell reconheceu uma falha na lei de Ampère. A figura mostra duas superfícies diferentes, S_1 e S_2 , limitadas pela mesma curva C ,

a qual circunda um fio que conduz corrente e está conectado à placa de um capacitor. A corrente através da superfície S_1 é I , porém não existe corrente através da superfície S_2 pois a carga para na placa do capacitor.

Portanto, existe ambiguidade na frase “a corrente através de qualquer superfície limitada pela curva.” Tal problema surge quando a corrente não é contínua.



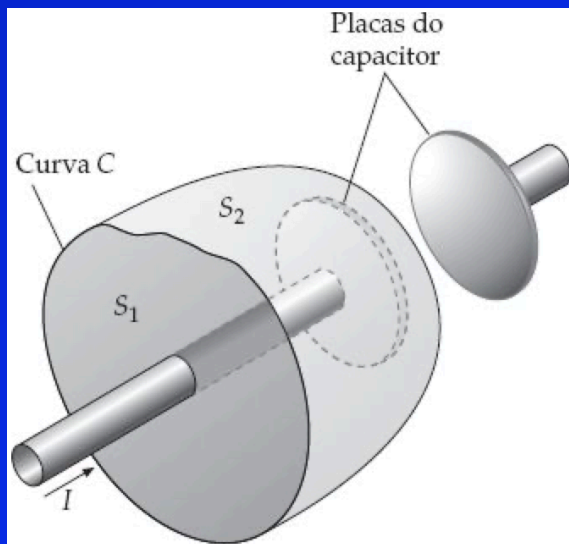
Maxwell mostrou que a lei de Ampère pode ser generalizada, para incluir todas as situações, se a corrente I , na equação, for substituída pela soma da corrente I , e outra corrente I_d , chamada de *corrente de deslocamento de Maxwell*, definida como

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

onde ϕ_e é o fluxo do campo elétrico através da mesma superfície limitada pela curva C .

A forma generalizada da lei de Ampère é, então,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$



Podemos entender esta generalização com a figura já utilizada. Vamos chamar a soma $I + I_d$ de corrente generalizada.

A corrente generalizada deve atravessar qualquer superfície limitada pela curva C .

As superfícies S_1 e S_2 juntas formam uma única superfície fechada.

Assim, como se trata de duas superfícies, cada uma devendo ser atravessada pela mesma corrente generalizada, então a soma das correntes generalizadas que atravessam a superfície fechada deve ser zero.

Atravessando S_1 , temos a corrente I , a qual aumenta a carga Q_{dentro}

no interior da região:
$$I = \frac{dQ_{dentro}}{dt}$$

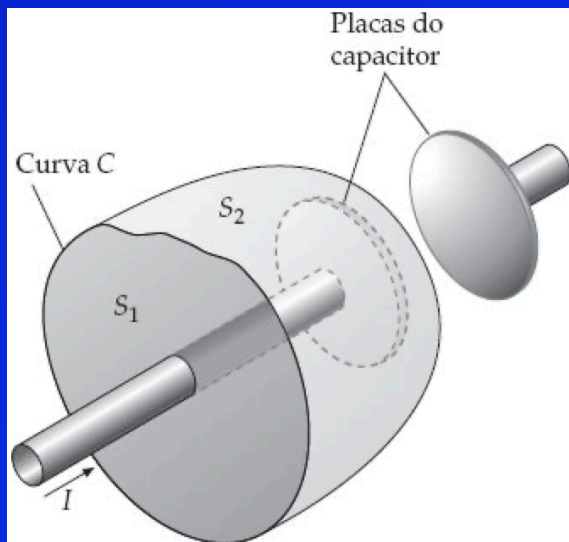
e o fluxo do campo elétrico $\phi_{e\ res}$ para fora da região fechada, através de S_2 , está relacionado à Q_{dentro} pela lei de Gauss:

$$\phi_{e\ res} = \oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{dentro} \quad \text{portanto} \quad Q_{dentro} = \epsilon_0 \phi_{e\ res}$$

e calculando a derivada em ambos os lados

$$\frac{dQ_{dentro}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_{e\ res}}{dt} = I_d$$

Assim, I atravessa S_1 e I_d atravessa S_2 . Dessa forma, a corrente generalizada é contínua e este resultado é geral.



Considerando agora a lei de Faraday em uma forma restrita, que inclui fems associadas a campos magnéticos variáveis no tempo, mas não inclui fems associadas a condutores em movimento, temos

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

e comparando com a lei de Ampère generalizada

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

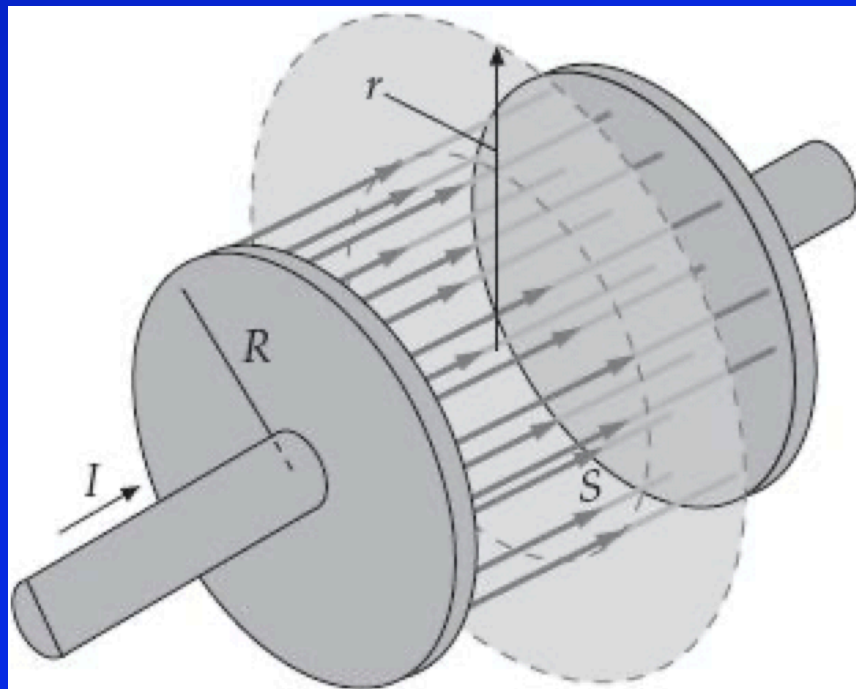
temos o interessante resultado recíproco que um campo magnético variável produz um campo elétrico (lei de Faraday) e que um campo elétrico variável produz um campo magnético (forma generalizada da lei de Ampère).

Observe ainda que não há um análogo magnético à corrente I . Isto é consistente com a observação que o monopolo magnético, o análogo magnético à carga elétrica, não existe.

Exemplo 30-1 Calculando a corrente de deslocamento

Um capacitor de placas paralelas (veja figura) tem placas circulares de raio R bem próximas uma da outra. A corrente I nos fios conectados às placas é 2,5 A. Calcule a corrente de deslocamento I_d através da superfície S passando entre as placas, através do cálculo da taxa de variação do fluxo de \vec{E} através da superfície S .

A corrente de deslocamento é $I_d = \epsilon_0 d\phi_e/dt$, onde ϕ_e é o fluxo elétrico através da superfície entre as placas. Como as placas



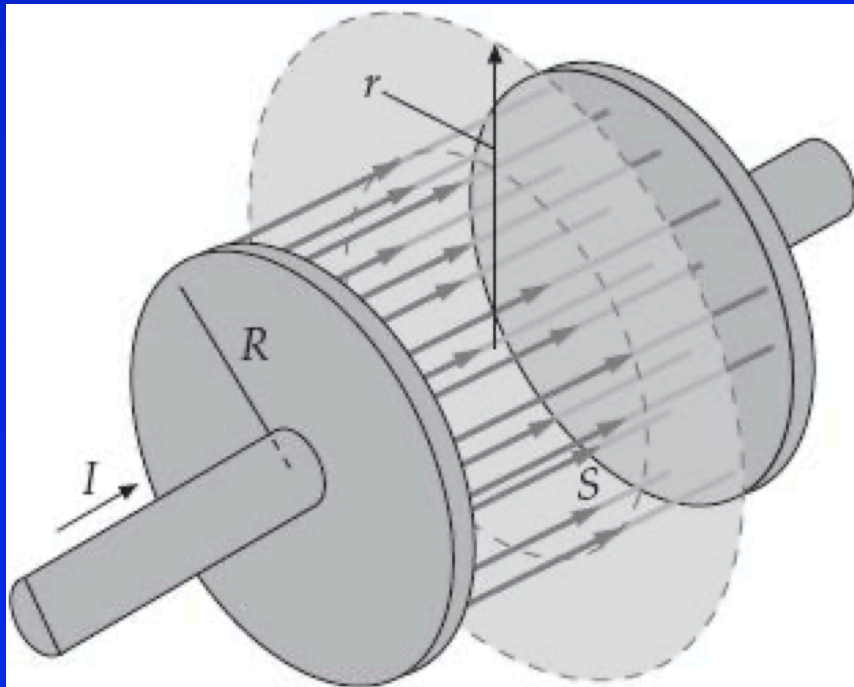
paralelas estão muito próximas, o campo elétrico na região entre elas é uniforme e perpendicular às placas. Fora da região entre as placas o campo elétrico é desprezível. Portanto, o fluxo elétrico é simplesmente $\phi_e = EA$, onde E é o campo elétrico entre as placas e A é a área da placa.

Exemplo 30-1 Calculando a corrente de deslocamento

Um capacitor de placas paralelas (veja figura) tem placas circulares de raio R bem próximas uma da outra. A corrente I nos fios conectados às placas é 2,5 A. Calcule a corrente de deslocamento I_d através da superfície S passando entre as placas, através do cálculo da taxa de variação do fluxo de \vec{E} através da superfície S .

Assim, $I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$ e $\phi_e = EA$ onde $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$

Do Cap. 22, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ para o campo elétrico próximo à superfície externa de um condutor.



Assim,

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 A \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{A\epsilon_0} \right) = \frac{dQ}{dt} = I = 2,5 \text{ A}$$

O resultado é igual à corrente nos fios, como esperado.

Exemplo 30-2 Calculando a partir da corrente de deslocamento

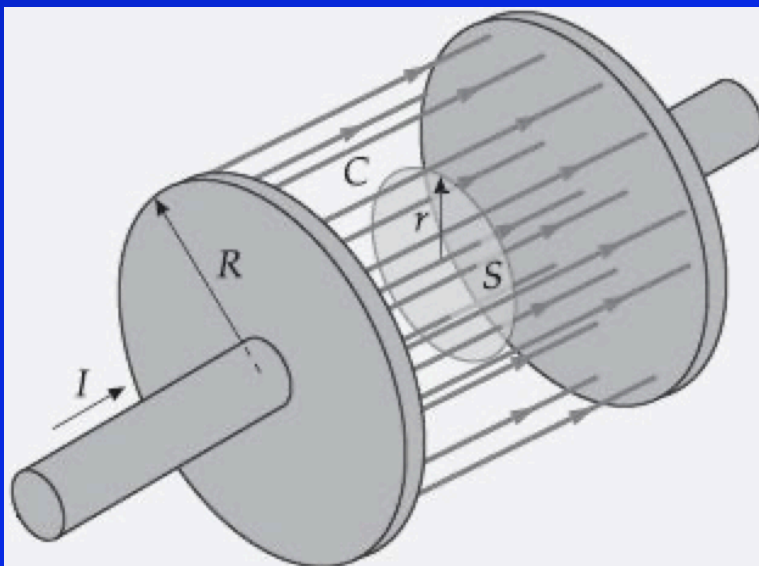
As placas circulares no Exemplo 30-1 têm raio $R = 3,0$ cm. Determine a intensidade do campo magnético B em um ponto entre as placas a uma distância $r = 2,0$ cm do eixo que passa através do centro entre as placas quando a corrente na placa é $2,5$ A.

Vamos obter B a partir da forma generalizada da lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

Vamos escolher uma trajetória

circular C de raio $r = 2,0$ cm em torno da linha central que une as placas, como mostrado na figura.



Então, calculamos a corrente de deslocamento através da superfície S limitada por C .

Por simetria, \vec{B} é tangente a C e tem a mesma magnitude em todos pontos em C .

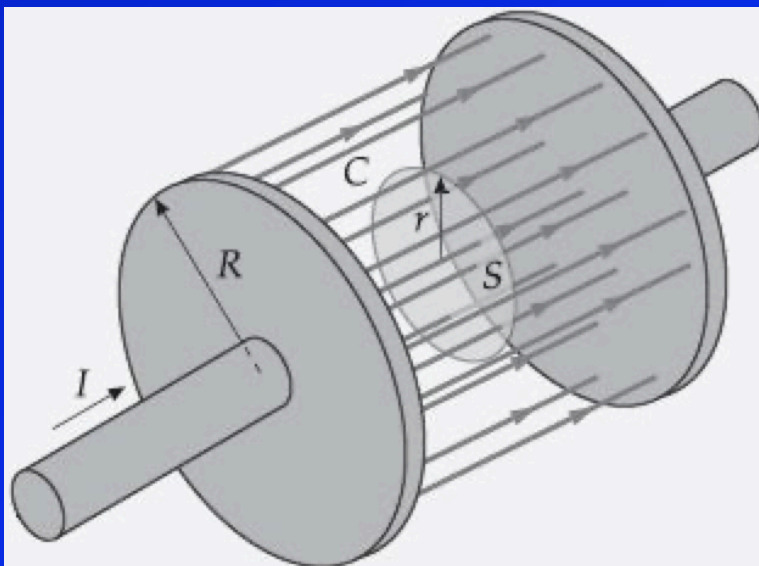
Exemplo 30-2 Calculando a partir da corrente de deslocamento

As placas circulares no Exemplo 30-1 têm raio $R = 3,0$ cm. Determine a intensidade do campo magnético B em um ponto entre as placas a uma distância $r = 2,0$ cm do eixo que passa através do centro entre as placas quando a corrente na placa é $2,5$ A.

Assim, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$ sendo $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r$

portanto, $B \cdot 2\pi r = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$ com $\phi_e = AE = \pi r^2 E = \pi r^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$= \pi r^2 \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} = \frac{Qr^2}{\epsilon_0 R^2}$$



$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Qr^2}{\epsilon_0 R^2} \right) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt} \\ B &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} \frac{dQ}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} I \\ &= (2 \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{0,02 \text{ m}}{(0,03 \text{ m})^2} (2,5 \text{ A}) \\ &= \boxed{1,11 \times 10^{-5} \text{ T}} \end{aligned}$$

30-2 EQUAÇÕES DE MAXWELL

$$\oint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dentro}}$$

30-6a

LEI DE GAUSS

$$\oint_S \vec{B}_n \cdot d\vec{A} = 0$$

30-6b

LEI DE GAUSS PARA O MAGNETISMO

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}_n \cdot d\vec{A} = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

30-6c

LEI DE FARADAY

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d), \text{ onde } I_d = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$$

30-6d

LEI DE AMPÈRE

A lei de Gauss

$$\oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dentro}}$$

diz que o fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual a $1/\epsilon_0$ multiplicado pela carga líquida no interior da superfície.

Como discutido no Capítulo 22, a lei de Gauss implica que o campo elétrico \vec{E} devido a uma carga puntiforme varia inversamente com o quadrado da distância até a carga.

Esta lei descreve como as linhas de campo elétrico saem de uma carga positiva e convergem para uma carga negativa.

Sua base experimental é a lei de Coulomb.

Considerando uma carga puntiforme isolada e aplicando a lei de Gauss, tomando como superfície gaussiana uma esfera centrada na carga puntiforme, teremos

$$\oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dentro}}$$

$$\therefore E \oint_S dA = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \therefore E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

A lei de Gauss

$$\oint_S E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dentro}}$$

diz que o fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual a $1/\epsilon_0$ multiplicado pela carga líquida no interior da superfície.

Como discutido no Capítulo 22, a lei de Gauss implica que o campo elétrico \vec{E} devido a uma carga puntiforme varia inversamente com o quadrado da distância até a carga.

Esta lei descreve como as linhas de campo elétrico saem de uma carga positiva e convergem para uma carga negativa.

Sua base experimental é a lei de Coulomb.

A lei de Gauss para o magnetismo

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

diz que o fluxo do campo magnético \vec{B} através de qualquer superfície fechada é zero.

Esta equação descreve a observação experimental que as linhas de campo magnético não divergem de nenhum ponto no espaço nem convergem para nenhum ponto no espaço; isto é, ela implica que não existem polos magnéticos isolados.

A lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

diz que a circulação do campo elétrico \vec{E} em torno de qualquer curva fechada C é igual ao negativo da taxa de variação do fluxo do campo magnético \vec{B} através de qualquer superfície S limitada pela curva C .

S não é uma superfície fechada, logo o fluxo magnético através de S não é necessariamente zero.

A lei de Faraday descreve como as linhas de campo elétrico circundam qualquer área através da qual o fluxo magnético está variando e relaciona o vetor campo elétrico \vec{E} à taxa de variação do vetor campo magnético \vec{B} .

**A lei de Ampère modificada,
incluindo a corrente de deslocamento de Maxwell,**

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d), \text{ onde } I_d = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$$

diz que a integral de linha do campo magnético \vec{B} em torno de qualquer curva fechada C é igual a μ_0 multiplicado pela soma da corrente I através de qualquer superfície S limitada pela curva C e da corrente de deslocamento I_d através da mesma superfície.

Esta lei descreve como as linhas de campo magnético circundam uma área através da qual uma corrente I ou uma corrente de deslocamento I_d estão passando.

Na próxima aula veremos como as equações de onda para o campo elétrico \vec{E} e para o campo magnético \vec{B} podem ser deduzidas das equações de Maxwell.