

Regressão de Séries Temporais

PNV-3421 – Processos Estocásticos

Prof. Dr. João Ferreira Netto

Bibliografia Principal

- Hanke, J.E & Reitsch A.G. (1998) Business Forecasting. 6th Edition, Prentice Hall, Upper Sadle River, NJ.

Regressão de Séries Temporais

- Iremos aplicar modelos de regressão linear para um conjunto de observações que foram coletadas ao longo do tempo.
 - Tipicamente, o problema que surge é a ausência de independência dos resíduos, deixando de caracterizar uma série aleatória, com distribuição aproximadamente normal. Ou seja, não se observa a propriedade de *homoscedasticidade*.
-

Exemplo Introdutório

- Considere o histórico de vendas de um determinado produto (10^3 \$), ao qual foi associada a renda líquida (10^6 \$) da região.

Ano	Vendas	Renda Líquida	Ano	Vendas	Renda Líquida
1976	295	273,4	1987	1528	510,4
1977	400	291,3	1988	1586	544,5
1978	390	306,9	1989	1960	588,1
1979	425	317,1	1990	2118	630,4
1980	547	336,1	1991	2116	685,9
1981	555	349,4	1992	2477	742,8
1982	620	362,9	1993	3199	801,3
1983	720	383,9	1994	3702	903,1
1984	880	402,8	1995	3316	983,6
1985	1050	437,0	1996	2702	1076,7
1986	1290	472,2			

Exemplo Introdutório

➤ Regressão linear

Call: `lm(formula = Y ~ X, data = ex1)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1087.54	-121.56	-41.98	108.26	651.16

$$\hat{Y} = 4,25X - 792$$

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-792.0024	187.1275	-4.232	0.000451 ***
X	4.2552	0.3163	13.454	3.67e-11 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

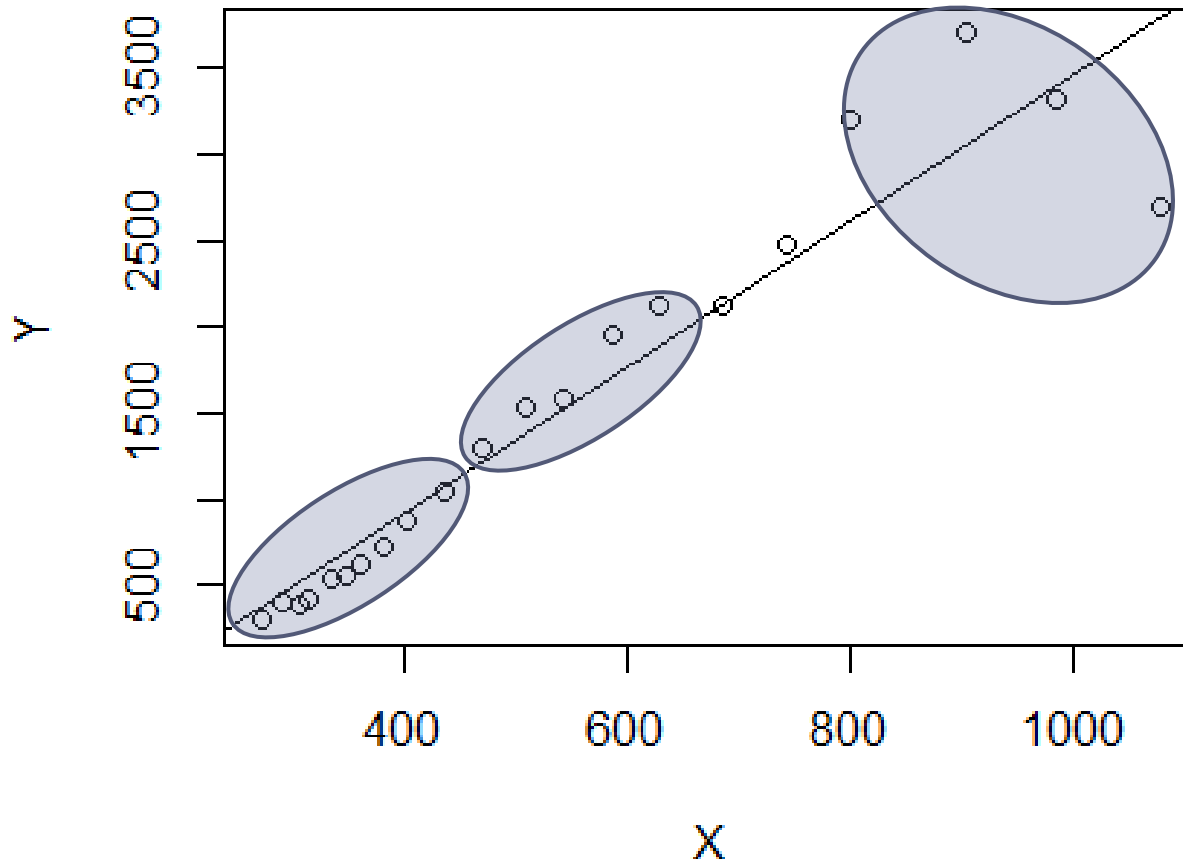
Residual standard error: 341.1 on 19 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.905, Adjusted R-squared: 0.9

F-statistic: 181 on 1 and 19 DF, p-value: 3.668e-11

Exemplo Introdutório

➤ Regressão linear



Resíduos negativos + Resíduos positivos + Resíduos com grande dispersão

Exemplo Introdutório

- O que se verifica é que o valor das vendas em um determinado período está correlacionado com o valor no período anterior (faria sentido ser totalmente aleatório!?). Assim, os resíduos não são independentes de uma observação para a próxima.
 - Iremos usar o termo *correlação serial* para esta característica.
-

Correlação Serial de Primeira Ordem

- A correlação mais usual é a de primeira ordem, na qual o erro é função do erro do período anterior.

$$\rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta X_t + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + v_t$$

1 período

- Onde:

ϵ_t – componente de erro

ρ – coeficiente de correlação serial de 1^a ordem

v_t – termo independente, normalmente distribuído

Correlação Serial de Primeira Ordem

- A principal causa da correlação serial é a ausência de variável explanatória no modelo.
 - Consequências: i) o erro padrão da estimativa subestima de forma significativa a variabilidade das componentes de erro; ii) o uso da distribuição t (e F) para construção do intervalo de confiança da previsão não é válido; iii) o erro padrão dos coeficientes da curva de regressão subestimam a variabilidade destes coeficientes.
-

Teste de Durbin-Watson

- Para detectar a correlação serial pode ser aplicado o teste de Durbin-Watson (DW), que consiste em fazer um teste de hipótese para determinar se o coeficiente ρ na expressão $\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + v_t$ é zero.
 - Teste de hipótese:
$$H_0: \rho = 0$$
$$H_1: \rho > 0$$
 - O teste será feito apenas para $\rho > 0$, que é o caso mais usual (OBS: se $\rho < 0$, então os resíduos mudam de sinal a cada período; é, portanto, um caso menos frequente).
-

Teste de Durbin-Watson

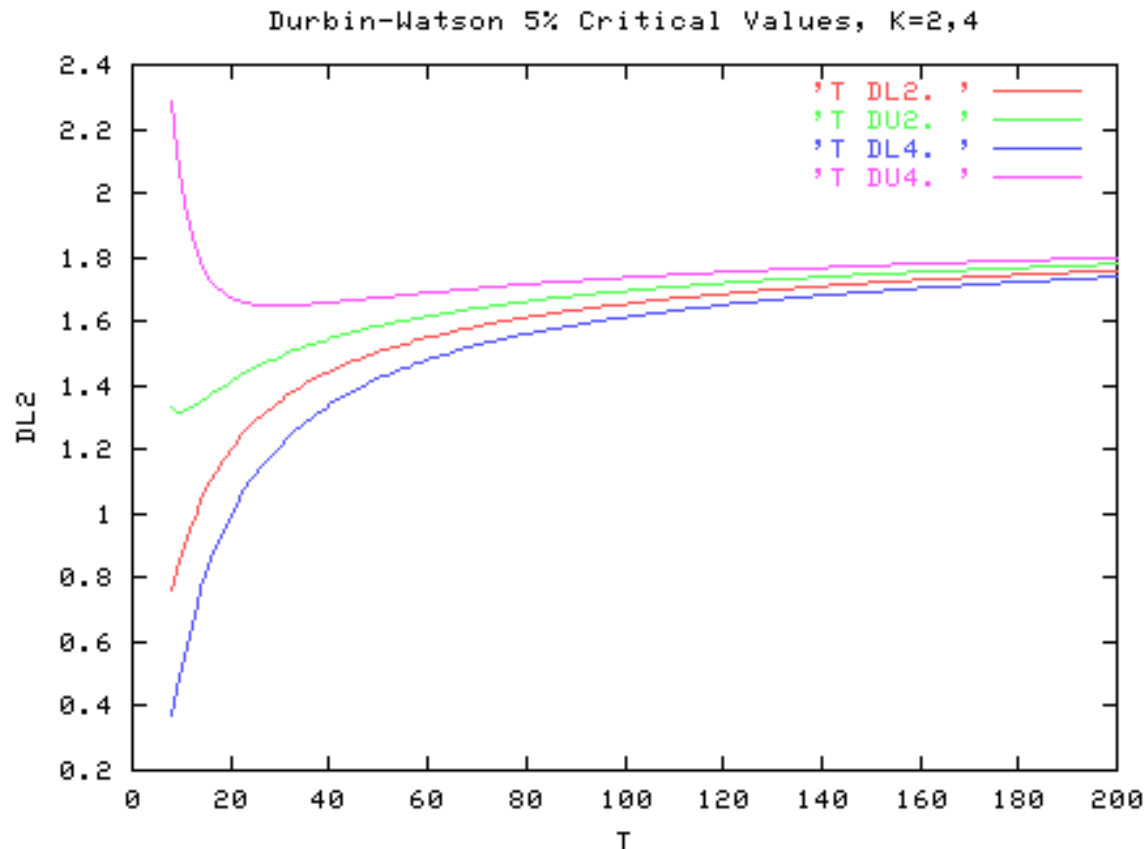
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

- Onde:
 - e_t - erro entre o valor observado e a curva de regressão
 - O teste é aproximado, e o valor calculado de DW é comparado a um limitante inferior (L) e um limitante superior (U):
 - Se $DW > U$, então aceita-se H_0
 - Se $DW < L$, então aceita-se H_1
 - Se $L \leq DW \leq U$, o teste é inconclusivo
-

Teste de Durbin-Watson

- Valores de referência:

<http://web.stanford.edu/~clint/bench/dwcrit.htm>



Teste de Durbin-Watson

p/Exemplo Introdutório

Ano	Vendas (Y)	Renda Líquida (X)	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1976	295	273,4	-76,4			5.832,3
1977	400	291,3	-47,5	28,8	831,3	2.259,8
1978	390	306,9	-123,9	-76,4	5.834,1	15.355,8
1979	425	317,1	-132,3	-8,4	70,6	17.509,0
1980	547	336,1	-91,2	41,2	1.693,4	8.312,0
1981	555	349,4	-139,8	-48,6	2.361,4	19.534,1
1982	620	362,9	-132,2	7,6	57,1	17.479,4
1983	720	383,9	-121,6	10,6	113,2	14.779,0
1984	880	402,8	-42,0	79,6	6.332,5	1.763,3
1985	1050	437,0	-17,5	24,5	598,9	307,0
1986	1290	472,2	72,7	90,2	8.139,1	5.284,8
1987	1528	510,4	148,1	75,5	5.692,9	21.947,9
1988	1586	544,5	61,0	-87,1	7.586,8	3.726,6
1989	1960	588,1	249,5	188,5	35.522,2	62.259,9
1990	2118	630,4	227,5	-22,0	483,8	51.767,3
1991	2116	685,9	-10,6	-238,2	56.721,9	113,2
1992	2477	742,8	108,2	118,9	14.132,2	11.715,9
1993	3199	801,3	581,3	473,1	223.796,0	337.922,1
1994	3702	903,1	651,1	69,8	4.874,9	423.971,9
1995	3316	983,6	-77,4	-728,5	530.775,8	5.992,7
1996	2702	1076,7	-1.087,6	-1.010,2	1.020.421,4	1.182.811,6

1.926.039,5 2.210.645,6

Teste de Durbin-Watson p/Exemplo Introdutório

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} = \frac{1.926.035,14}{2.210.641,78} = 0,87$$

- Valores de referência para $\alpha = 1\%$ de nível de significância, amostra de 21 dados e 1 variável independente:

Critical Values for the Durbin-Watson Test: 1% Significance Level

T=6 to 100, K=2 to 21 (K <= T-4)

K includes intercept

T	K	dL	dU
21.	2.	0.97545	1.16059
21.	3.	0.88950	1.27688
21.	4.	0.80319	1.40823
21.	5.	0.71752	1.55360

$DW < 0,97 \rightarrow$ aceitamos H_1 (os resíduos são correlacionados)

Exemplo 2

- Neste exemplo, vamos corrigir o efeito da correlação serial dos resíduos, pela adição de uma nova variável explanatória.
- O exemplo é similar ao primeiro, em que o nível de vendas é, inicialmente, explicado pela renda líquida total dos clientes de uma determinada região.

Ano	Vendas	Renda Líquida
1980	8,0	336,1
1981	8,2	349,4
1982	8,5	362,9
1983	9,2	383,9
1984	10,2	402,8
1985	11,4	437,0
1986	12,8	472,2
1987	13,6	510,4
1988	14,6	544,5
1989	16,4	588,1
1990	17,8	630,4
1991	18,6	685,9
1992	20,0	742,8
1993	21,9	801,3
1994	24,9	903,1
1995	27,3	983,6
1996	29,1	1076,7

Exemplo 2

➤ Regressão linear

Call: `lm(formula = Y ~ X, data = ex2)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.82600	-0.30668	0.04167	0.20522	0.90222

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-1.5046209	0.3290264	-4.573	0.000366 ***
X	0.0291916	0.0005129	56.920	< 2e-16 ***

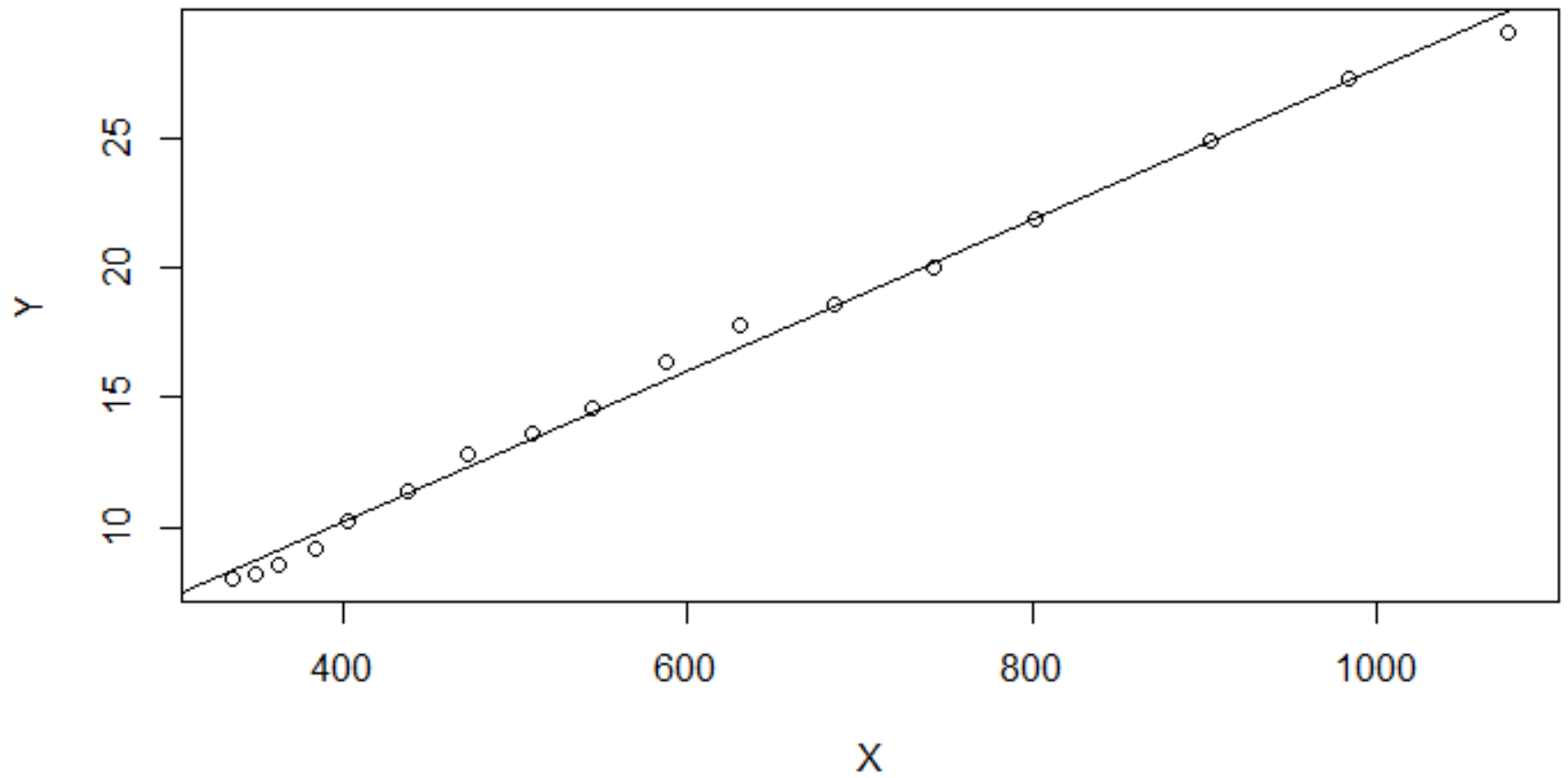
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.4767 on 15 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9954, Adjusted R-squared: 0.9951

F-statistic: 3240 on 1 and 15 DF, p-value: < 2.2e-16

Exemplo 2



Teste de Durbin-Watson p/Exemplo 2

Ano	Vendas (Y)	Renda Líquida (X)	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1980	8,0	336,1	-0,3			0,1
1981	8,2	349,4	-0,5	-0,2	0,0	0,2
1982	8,5	362,9	-0,6	-0,1	0,0	0,3
1983	9,2	383,9	-0,5	0,1	0,0	0,3
1984	10,2	402,8	-0,1	0,4	0,2	0,0
1985	11,4	437,0	0,1	0,2	0,0	0,0
1986	12,8	472,2	0,5	0,4	0,1	0,3
1987	13,6	510,4	0,2	-0,3	0,1	0,0
1988	14,6	544,5	0,2	0,0	0,0	0,0
1989	16,4	588,1	0,7	0,5	0,3	0,5
1990	17,8	630,4	0,9	0,2	0,0	0,8
1991	18,6	685,9	0,1	-0,8	0,7	0,0
1992	20,0	742,8	-0,2	-0,3	0,1	0,0
1993	21,9	801,3	0,0	0,2	0,0	0,0
1994	24,9	903,1	0,0	0,0	0,0	0,0
1995	27,3	983,6	0,1	0,1	0,0	0,0
1996	29,1	1076,7	-0,8	-0,9	0,8	0,7
					2,5	3,4

Teste de Durbin-Watson p/Exemplo 2

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} = \frac{2,5}{3,3} = 0,7218$$

- Valores de referência para $\alpha = 1\%$ de nível de significância, amostra de 17 dados e 1 variável independente:

Critical Values for the Durbin-Watson Test: 1% Significance Level

T=6 to 100, K=2 to 21 (K ≤ T-4)

K includes intercept

T	K	dL	dU
---	---	----	----

17.	2.	0.87363	1.10210
-----	----	---------	---------

$DW < 0,87 \rightarrow$ aceitamos H_1 (os resíduos são correlacionados)

17.	3.	0.77209	1.25512
-----	----	---------	---------

17.	4.	0.67158	1.43193
-----	----	---------	---------

17.	5.	0.57380	1.63022
-----	----	---------	---------

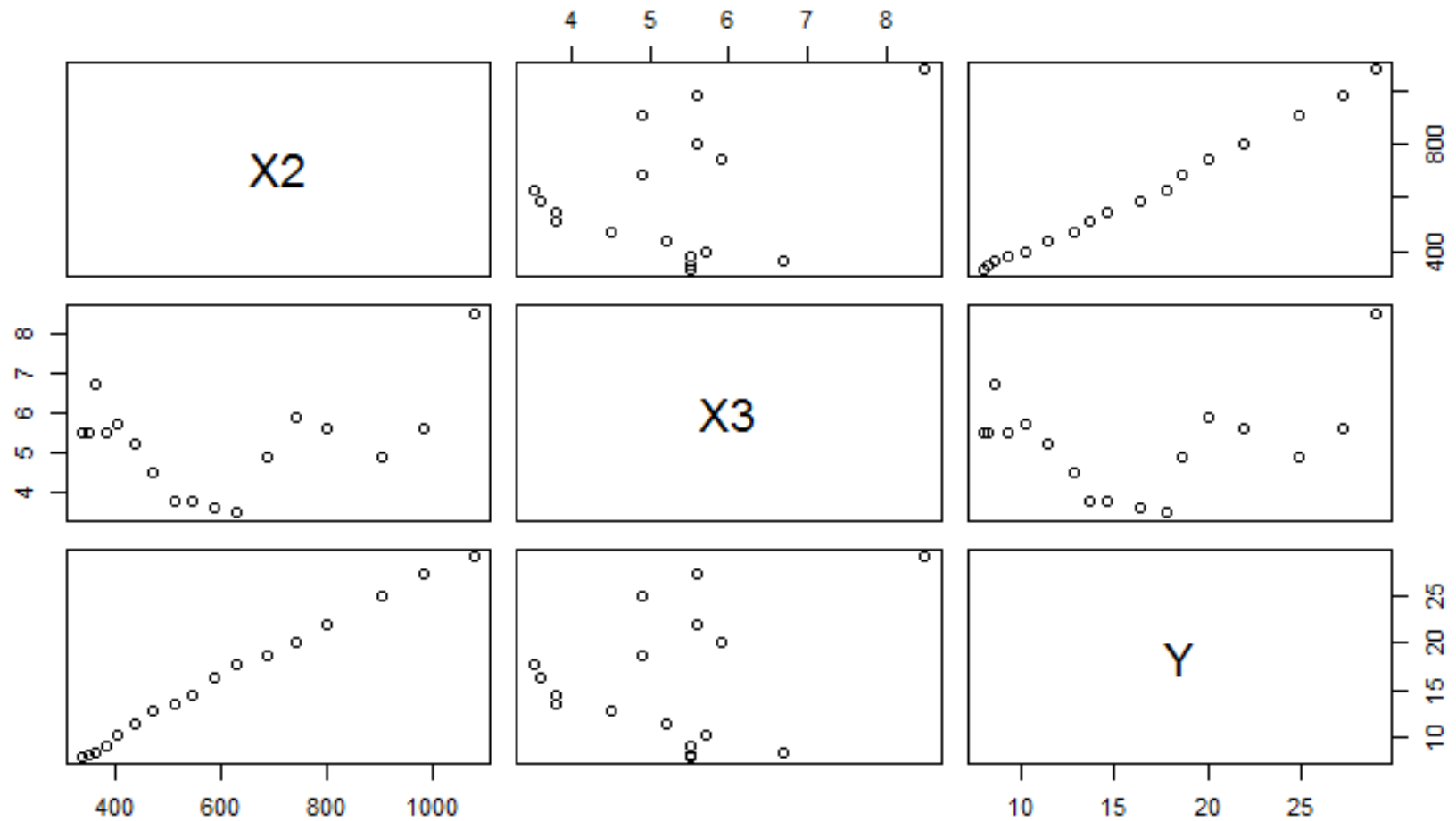
Exemplo 2



- Dado que os dados apresentam correlação entre os resíduos, uma nova variável explanatória será introduzida, que consiste na taxa de desemprego da região.

Ano	Vendas	Renda Líquida	Taxa
1980	8,0	336,1	5,5
1981	8,2	349,4	5,5
1982	8,5	362,9	6,7
1983	9,2	383,9	5,5
1984	10,2	402,8	5,7
1985	11,4	437,0	5,2
1986	12,8	472,2	4,5
1987	13,6	510,4	3,8
1988	14,6	544,5	3,8
1989	16,4	588,1	3,6
1990	17,8	630,4	3,5
1991	18,6	685,9	4,9
1992	20,0	742,8	5,9
1993	21,9	801,3	5,6
1994	24,9	903,1	4,9
1995	27,3	983,6	5,6
1996	29,1	1076,7	8,5

Exemplo 2



Exemplo 2

➤ Regressão linear

Call: `lm(formula = Y ~ X2 + X3, data = ex2b)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.2824	-0.2381	0.0120	0.1781	0.3409

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.014022	0.249795	-0.056	0.956
X2	0.029749	0.000248	119.963	< 2e-16 ***
X3	-0.349869	0.046561	-7.514	2.82e-06 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.2199 on 14 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9991, Adjusted R-squared: 0.999

F-statistic: 7638 on 2 and 14 DF, p-value: < 2.2e-16

Teste de Durbin-Watson p/Exemplo 2

Ano	Vendas (Y)	Renda Líquida (X2)	Taxa (X3)	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1980	8,0	336,1	5,5	-0,1			0,0
1981	8,2	349,4	5,5	-0,3	-0,2	0,0	0,1
1982	8,5	362,9	6,7	0,1	0,3	0,1	0,0
1983	9,2	383,9	5,5	-0,3	-0,3	0,1	0,1
1984	10,2	402,8	5,7	0,2	0,5	0,3	0,1
1985	11,4	437,0	5,2	0,2	0,0	0,0	0,1
1986	12,8	472,2	4,5	0,3	0,1	0,0	0,1
1987	13,6	510,4	3,8	-0,2	-0,6	0,3	0,1
1988	14,6	544,5	3,8	-0,3	0,0	0,0	0,1
1989	16,4	588,1	3,6	0,2	0,4	0,2	0,0
1990	17,8	630,4	3,5	0,3	0,1	0,0	0,1
1991	18,6	685,9	4,9	-0,1	-0,4	0,1	0,0
1992	20,0	742,8	5,9	0,0	0,1	0,0	0,0
1993	21,9	801,3	5,6	0,0	0,1	0,0	0,0
1994	24,9	903,1	4,9	-0,2	-0,3	0,1	0,1
1995	27,3	983,6	5,6	0,0	0,3	0,1	0,0
1996	29,1	1076,7	8,5	0,1	0,0	0,0	0,0
						1,3	0,7

Teste de Durbin-Watson p/Exemplo 2

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} = \frac{1,3}{0,7} = 1,98$$

- Valores de referência para $\alpha = 1\%$ de nível de significância, amostra de 17 dados e 2 variáveis independentes:

Critical Values for the Durbin-Watson Test: 1% Significance Level

T=6 to 100, K=2 to 21 (K ≤ T-4)

K includes intercept

T	K	dL	dU
---	---	----	----

17.	2.	0.87363	1.10210
-----	----	---------	---------

17.	3.	0.77209	1.25512
------------	-----------	----------------	----------------

17.	4.	0.67158	1.43193
-----	----	---------	---------

17.	5.	0.57380	1.63022
-----	----	---------	---------

$DW > 1,25 \rightarrow$ aceitamos H_0 (os resíduos **não** são correlacionados)

Modelos Autoregressivos

Modelos Autoregressivos

$$= \hat{Y}_t$$

- Uma maneira de resolver problemas com autocorrelação é desenvolvendo um modelo que reconhece a relação entre os resíduos.

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + \epsilon_t$$

$$\Rightarrow \epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + v_t \quad \text{ou} \quad v_t = \epsilon_t - \rho \epsilon_{t-1}$$

- O novo modelo pode ser escrito como:

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + \rho \epsilon_{t-1} + v_t$$

- Se ρ for conhecido, então o método dos mínimos quadrados pode ser usado para gerar os parâmetros do modelo de regressão, de forma que os erros sejam independentes.

Modelos Autoregressivos

- Notar que

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta X_t + \epsilon_t \\ \rho \cdot (Y_{t-1}) &= (\beta_0 + \beta X_{t-1} + \epsilon_{t-1}) \cdot \rho \end{aligned}$$

- Vamos multiplicar a segunda expressão por ρ e subtrair da primeira expressão.

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (\beta_0 - \rho\beta_0) + (\beta X_t - \rho\beta X_{t-1}) + (\epsilon_t - \rho\epsilon_{t-1})$$

- Fazendo $Y_t' = Y_t - \rho Y_{t-1}$, $X_t' = X_t - \rho X_{t-1}$, $\beta_0' = \beta_0(1 - \rho)$: $Y_t' = \beta_0' + \beta X_t' + v_t$

- Para a expressão de Y_t' , os erros não apresentam correlação serial, e o valor de β é mantido.

Modelos Autoregressivos

- Para poder fazer a devida transformação, faz-se necessário estimar o valor de ρ .
- Uma das formas empregadas de estimativa de ρ é por meio do coeficiente de correlação entre os resíduos defasados por 1 período.
- Outro método, proposto por Cochrane e Orcutt utiliza $\hat{\rho}$ como estimativa de ρ , onde:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2}$$

Exemplo 3

- Considere o histórico de vendas de um determinado produto (10^3 \$), ao qual foi associada a renda líquida (10^6 \$) da região.

Ano	Vendas	Renda Líquida	Ano	Vendas	Renda Líquida
1976	3307	273,4	1987	6769	510,4
1977	3556	291,3	1988	7296	544,5
1978	3601	306,9	1989	8178	588,1
1979	3721	317,1	1990	8844	630,4
1980	4036	336,1	1991	9251	685,9
1981	4134	349,4	1992	10006	742,8
1982	4268	362,9	1993	11200	801,3
1983	4758	383,9	1994	12500	903,1
1984	5093	402,8	1995	13101	983,6
1985	5716	437,0	1996	13640	1076,7
1986	6357	472,2			

Exemplo 3

➤ Regressão linear

Call: `lm(formula = Y ~ X, data = ex3b)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-958.35	-191.61	-25.04	161.78	505.03

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-502.4086	185.2800	-2.712	0.0138 *
X	14.0250	0.3131	44.787	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 337.7 on 19 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9906, Adjusted R-squared: 0.9901

F-statistic: 2006 on 1 and 19 DF, p-value: 2.2e-16

Teste de Durbin-Watson p/Exemplo 3

Ano	Vendas (Y)	Renda Líquida (X)	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1976	3307	273,4	-25,0			626,3
1977	3556	291,3	-27,1	-2,0	4,2	733,0
1978	3601	306,9	-200,9	-173,8	30.203,0	40.346,3
1979	3721	317,1	-223,9	-23,1	531,5	50.139,7
1980	4036	336,1	-175,4	48,5	2.354,7	30.763,0
1981	4134	349,4	-263,9	-88,5	7.838,0	69.657,1
1982	4268	362,9	-319,3	-55,3	3.062,2	101.929,4
1983	4758	383,9	-123,8	195,5	38.210,5	15.323,7
1984	5093	402,8	-53,9	69,9	4.889,9	2.901,1
1985	5716	437,0	89,5	143,3	20.547,8	8.007,3
1986	6357	472,2	236,8	147,3	21.703,2	56.075,9
1987	6769	510,4	113,0	-123,8	15.315,3	12.780,0
1988	7296	544,5	161,8	48,7	2.376,3	26.178,0
1989	8178	588,1	432,3	270,5	73.175,7	186.888,6
1990	8844	630,4	505,0	72,7	5.291,5	255.074,1
1991	9251	685,9	133,7	-371,4	137.928,7	17.865,3
1992	10006	742,8	90,6	-43,0	1.850,9	8.215,4
1993	11200	801,3	464,2	373,5	139.530,3	215.459,5
1994	12500	903,1	336,4	-127,7	16.318,8	113.185,9
1995	13101	983,6	-191,6	-528,0	278.797,2	36.703,4
1996	13640	1076,7	-958,3	-766,7	587.871,1	918.355,9

1.387.800,6 2.167.208,9

Teste de Durbin-Watson p/Exemplo 3

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} = \frac{1.387.800,6}{2.166.582,6} = 0,64$$

- Valores de referência para $\alpha = 1\%$ de nível de significância, amostra de 21 dados e 1 variável independente:

Critical Values for the Durbin-Watson Test: 1% Significance Level

T=6 to 100, K=2 to 21 (K ≤ T-4)

K includes intercept

T	K	dL	dU
---	---	----	----

21.	2.	0.97545	1.16059
-----	----	---------	---------



$DW < 0,97 \rightarrow$ aceitamos H_1 (os resíduos são correlacionados)

21.	3.	0.88950	1.27688
-----	----	---------	---------

21.	4.	0.80319	1.40823
-----	----	---------	---------

21.	5.	0.71752	1.55360
-----	----	---------	---------



Exemplo 3

➤ Correlação dos resíduos, defasados em 1 período:

➤ $\rho \sim 0,627$

T	U	V	W	X	Y	Z
---	---	---	---	---	---	---

Ano	Vendas (Y)	Renda Líquida (X)	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1976	3307	273,4	-25,0			
1977	3556	291,3	-27,1	-2,0	4,2	733,0
1978	3601	306,9	-200,9	-173,8	30.203,0	40.346,3
1979	3721	317,1	-223,9	-23,1	531,5	50.139,7
1980	4036	336,1	-175,4	48,5	2.354,7	30.763,0
1981	4134	349,4	-263,9	-88,5	7.838,0	69.657,1
1982	4268	362,9	-319,3	-55,3	3.062,2	101.929,4
1983	4758	383,9	-123,8	195,5	38.210,5	15.323,7
1984	5093	402,8	-53,9	69,9	4.889,9	2.901,1
1985	5716	437,0	89,5	143,3	20.547,8	8.007,3
1986	6357	472,2	236,8	147,3	21.703,2	56.075,9
1987	6769	510,4	113,0	-123,8	15.315,3	12.780,0
1988	7296	544,5	161,8	48,7	2.376,3	26.178,0
1989	8178	588,1	432,3	270,5	73.175,7	186.888,6
1990	8844	630,4	505,0	72,7	5.291,5	255.074,1
1991	9251	685,9	133,7	-371,4	137.928,7	17.865,3
1992	10006	742,8	90,6	-43,0	1.850,9	8.215,4
1993	11200	801,3	464,2	373,5	139.530,3	215.459,5
1994	12500	903,1	336,4	-127,7	16.318,8	113.185,9
1995	13101	983,6	-191,6	-528,0	278.797,2	36.703,4
1996	13640	1076,7	-958,3	-766,7	587.871,1	918.355,9

1.387.800,6 2.166.582,6

=CORREL(W5:W24;W6:W25)

Exemplo 3

- $Y_t' = Y_t - \rho Y_{t-1}$
- $Y_2' = Y_2 - 0,627Y_1 =$
 $3556 - 0,627 * 3307 =$
 $1481,7$
- $X_t' = X_t - \rho X_{t-1}$
- $X_2' = X_2 - 0,627X_1 =$
 $291,3 - 0,627 * 273,4 =$
 $119,8$

Ano	Vendas (Y)	Renda Líquida (X)	Vendas (Y')	Renda Líquida (X')
1976	3307	273,4		
1977	3556	291,3	1481,7	119,8
1978	3601	306,9	1370,5	124,2
1979	3721	317,1	1462,3	124,6
1980	4036	336,1	1702,0	137,2
1981	4134	349,4	1602,4	138,6
1982	4268	362,9	1675,0	143,7
1983	4758	383,9	2080,9	156,3
1984	5093	402,8	2108,6	162,0
1985	5716	437,0	2521,4	184,3
1986	6357	472,2	2771,7	198,1
1987	6769	510,4	2781,6	214,2
1988	7296	544,5	3050,2	224,4
1989	8178	588,1	3601,6	246,6
1990	8844	630,4	3714,4	261,5
1991	9251	685,9	3703,6	290,5
1992	10006	742,8	4203,3	312,6
1993	11200	801,3	4923,8	335,4
1994	12500	903,1	5474,8	400,5
1995	13101	983,6	5260,4	417,1
1996	13640	1076,7	5422,4	459,7

Teste de Durbin-Watson no R

- Instalar o pacote “lmtest”
 - Carregar a biblioteca: `library(lmtest)`
 - Comando: `dwtest(model)`
 - Para o exemplo 2, com 1 variável independente: `dwtest(ex2.lm)`
Durbin-Watson test - data: ex2.lm
DW = 0.72181, p-value = 0.0003129
 - Para o exemplo 2, com 2 variáveis independentes: `dwtest(ex2b.lm)`
Durbin-Watson test - data: ex2b.lm
DW = 1.98, p-value = 0.0003129
-

Exercício

- Para os dados fornecidos: faça a regressão linear simples e aplique os teste de Durbin-Watson para verificar se os resíduos são correlacionados. Neste caso, estime o coeficiente de correlação, realize a transformação linear, gerando as expressões de Y_t' e X_t' , e reaplique o teste para checar se ainda há correlação.
-