Produto interno

Seja V um espaço vetorial. Uma função

$$<,> : V \times V \to \mathbb{R}$$

é um produto interno se

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in V$
2) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle, \quad \forall u_1, u_2, v \in V$
3) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle, \quad \forall u, v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4) $\langle v, v\rangle \geq 0$ e se $\langle v, v\rangle = 0$ então $v = 0_V$

Seja V um espaço vetorial com produto interno $<,>$.

- $\forall v \in V$ definimos a norma de v: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
- A distância $d(u,v)$ entre elementos u e v definimos

por: $\quad d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$

Ex. $V = C([0, \frac{\pi}{2}])$, $\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f \cdot g \, dx$

Achar a distância entre $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

$$\langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\langle \cos x, \cos x\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(\operatorname{sen} x, \cos x) = \|\operatorname{sen} x - \cos x\| = \sqrt{\langle \operatorname{sen} x - \cos x, \operatorname{sen} x - \cos x\rangle}$$

$$\Rightarrow d^2(\operatorname{sen} x, \cos x) = \langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x\rangle - 2\langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle + \langle \cos x, \cos x\rangle$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow \underline{d(\operatorname{sen} x, \cos x) = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

- Desigualdade de Cauchy-Schwarz

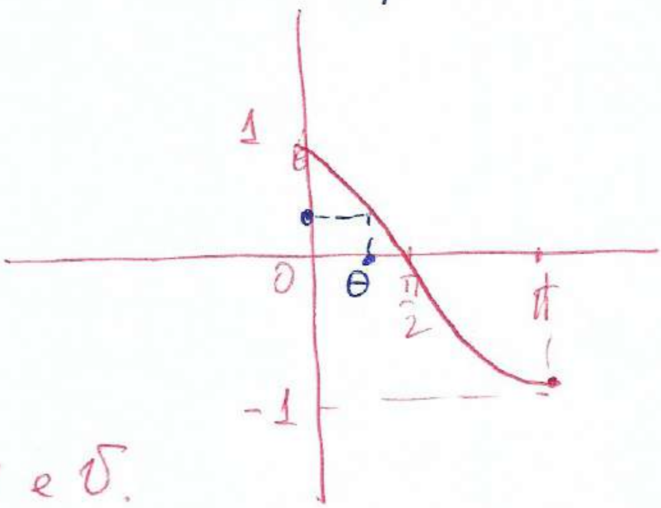
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

- Definimos o ângulo entre u e v.

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \iff -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

$\exists$ um único valor de $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



θ é o ângulo entre u e v.

Ex. $V = C([0, \frac{\pi}{2}])$ $\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f \cdot g \, dx$

Encontrar o ângulo entre $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$

$$\cos\theta = \frac{\langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle}{\|\operatorname{sen} x\| \cdot \|\cos x\|}$$

$\langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle = \frac{1}{2}$, $\|\operatorname{sen} x\| = \sqrt{\langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x\rangle} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \|\cos x\|$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Ortogonalidade em espaços com produto interno

- u e v são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$
- Seja S um subespaço vetorial de V. O conjunto de elementos de V ortogonais a cada elemento de S é chamado complemento ortogonal de S e denotado por $S^\perp$

<u>Proposição</u> Seja V um espaço com $\langle , \rangle$ e seja S um subespaço vetorial. Então

1) $S^\perp$ é um subespaço de V
2) $S \cap S^\perp = \{0_V\}$
3) $(S^\perp)^\perp \supset S$

<u>Demo</u> 1) Sejam $u, w \in S^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $u + w \in S^\perp$ e $\lambda w \in S^\perp$.

Considere $\forall v \in V$. Temos $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle = 0$ e

$$\langle u+w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle = 0$$

$$\langle \lambda w, v\rangle = \lambda \langle w, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow S^\perp \text{ é subespaço vetorial}$$

2) Seja $u \in S \cap S^{\perp}$. Logo $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0_V$

3) Se $v \in S$ então $\langle v, s \rangle = 0$, $\forall s \in S^{\perp} \Rightarrow$

$v \in (S^{\perp})^{\perp} \Rightarrow S \subset (S^{\perp})^{\perp}$.

Ex. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformação linear associada

com matriz A : $T_A(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$

$i = 1, \ldots, n$

base canónica de $\mathbb{R}^n$

- Ker T_A é o conjunto solução do sistema

$$A\bar{X} = \bar{0} \qquad (*)$$

- Considere linhas da matriz A:

$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \in \mathbb{R}^n$

$v_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{R}^n$

$\vdots$

$v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^n$

Se $\omega = (x_1, .., x_n)$ é uma solução de $(*)$

então $v_i \cdot [\omega]^t = (a_{i1}, a_{i2}, .., a_{in}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ $v_i \perp \omega$ em relação do produto interno

de $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1, .., x_n), (y_1, .., y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} T_A \subset S^\perp$ onde $S = [v_1, .., v_m]$

Reciprocamente, se $\omega \in S^\perp$ então $\omega \perp v_i$, $\forall i = 1, .., m$

$\Rightarrow$ ω é uma solução do sistema $(*)$

e, logo, $\omega \in \operatorname{Ker} T_A$.

Portanto $\operatorname{Ker} T_A = S^\perp$.

Ex. $V = \mathbb{R}^3$ com $\langle , \rangle$ usual

$S = \{(x, y, z) \mid x - y = 0, x + 2z = 0\}$

Encontrar $S^\perp$.

. S é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -2z$$

$$x = y = -2z$$

$$\Rightarrow S = \{ (-2z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \} = \{ z(-2,-2,1) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow S = [(-2,-2,1)].$$

$$S^{\perp} = \{ \omega \in \mathbb{R}^3 \mid \omega \perp (-2,-2,1) \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \mid -2x - 2y + z = 0 \} =$$

$$= \{ \cancel{(-2x,} \ (x, y, 2x+2y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ x(1,0,2) + y(0,1,2) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$S^{\perp} = [\underline{(1,0,2), (0,1,2)}].$$

- Seja V um espaço com produto interno

Um conjunto $\{v_1, .., v_n\}$ de elementos de V é chamado ortogonal se $v_i \perp v_j$ $\forall i \neq j$ $(\langle v_i, v_j \rangle = 0)$

Teorema: Qualquer conjunto $\{v_1, .., v_n\}$ ortogonal de elementos não nulos é um conjunto LI

Demo. Seja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$

$$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \langle 0_V, v_i \rangle = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle = \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_i = 0, \ \forall i$$

$\Rightarrow$ LI.

Def. Seja V um espaço com produto interno

- Uma base $B = \{v_1, .., v_n\}$ é ortogonal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$.
- Uma base $B = \{v_1, .., v_n\}$ é ~~ortogonal~~ ortonormal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$ e $\|v_i\| = 1$, $\forall i$.

Proposição: Se $B = \{v_1, .., v_n\}$ é uma base ortonormal de V com produto interno $\langle , \rangle$, então

$\forall\, v \in V$ temos $\underline{v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n\rangle v_n}$

i.e. $(\langle v, v_1\rangle, \langle v, v_2\rangle, \dots, \langle v, v_n\rangle)$ são as coordenadas de v na base B.

<u>Demo</u> Seja $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Então

$$\langle v, v_i\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_j, v_i\rangle$$

$$= \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i\rangle}_{1} = \alpha_i \,, \quad \forall i$$

<u>Proposição</u> Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base <u>ortogonal</u>. Então $\forall\, v \in V$ temos

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Demo. A base $C = \left\{ \underbrace{\frac{v_1}{\|v_1\|}}_{\omega_1}, \underbrace{\frac{v_2}{\|v_2\|}}_{\omega_2}, \dots, \underbrace{\frac{v_n}{\|v_n\|}}_{\omega_n} \right\}$ é ortonormal. Portanto,

$$v = \langle v, \omega_1\rangle \omega_1 + \langle v, \omega_2\rangle \omega_2 + \dots + \langle v, \omega_n\rangle \omega_n$$

pela Proposição anterior.

Logo, $v = \langle v, \frac{v_1}{\|v_1\|}\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \langle v, \frac{v_n}{\|v_n\|}\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|^2} =$

$$= \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n .$$

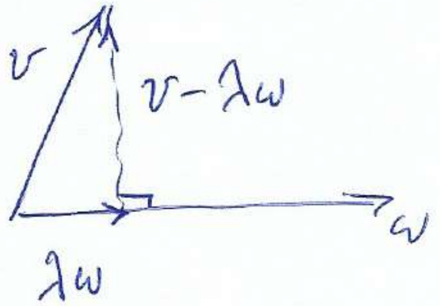
Vamos dar uma interpretação para coeficientes

$$\frac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2}$$

Considere v e $w \neq 0_V$ de V. Vamos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v - \lambda w$ é ortogonal a w. Temos

$$\langle v - \lambda w, w\rangle = 0$$

$$\langle v - \lambda w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \lambda \langle w, w\rangle \implies \lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$$

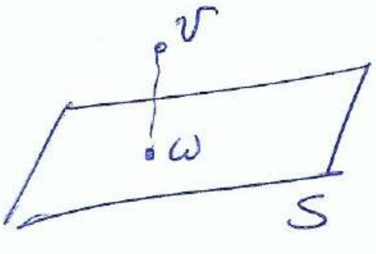


$\implies \lambda = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$ é o único valor tal que $(v - \lambda w) \perp w$

<u>Def</u>. A projeção ortogonal de v no w é definida por:

$$\boxed{\mathrm{proj}_w v = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \cdot w}$$

Seja V um espaço com produto interno e seja S um subespaço de dimensão finita de V. A melhor aproximação de um elemento $v \in V$ em S é o elemento $w \in S$ tal que $\|v-w\|$ seja menor possível (neste caso w esteja o mais próximo possível de v)



~~Proposição~~ Teorema ∃ o único $w \in S$ tal que $v - w \in S^{\perp}$.
Para este elemento w temos $\|v-w\| \leq \|v-w'\|$, $\forall \underset{\neq w}{w'} \in S$.
(O elemento w é chamado a projeção ortogonal de v no subespaço S: $\mathrm{proj}_S\, v$)

<u>Demo</u> $\|v-w'\|^2 = \|\underbrace{(v-w)}_{\in S^{\perp}} + \underbrace{(w-w')}_{\in S}\|^2 =$ (suponhamos que w existe)

$= \|v-w\|^2 + \|w-w'\|^2 > \|v-w\|^2$ se $w' \neq w$

$\Rightarrow \|v-w\| < \|v-w'\|$ se $w' \neq w$. Isso prova a unicidade de w. Falta mostrar a existência.

- Seja $B=\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de S.

e $w = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$. (**)

Vamos mostrar que $v-w \in S^\perp$ ou seja $\langle v-w, s\rangle = 0$, $\forall s \in S$. É suficiente verificar esse igualdade para elementos da base B:

$$\langle v-w, v_i\rangle = 0, \ \forall i.$$

Fixamos i. Temos

$$\langle v-w, v_i\rangle = \langle v - \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \cdots - \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n, v_i\rangle$$

$$= \langle v, v_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} \langle v_j, v_i\rangle =$$

$$= \langle v, v_i\rangle - \frac{\langle v, v_i\rangle}{\cancel{\|v_i\|^2}} \cancel{\langle v_i, v_i\rangle} = 0.$$

Então, de fato, o elemento w definido por (**) é a projeção ortogonal de v no subespaço S procurado.

- Falta de mostrar a existência de uma base ortogonal de S.

Seja $\mathbb{C} = \{e_1, .., e_n\}$ uma base qualquer de S (existe pois S tem dimensão finita)

Definimos $v_1 = e_1$ e $v_2 = e_2 - \text{proj}_{v_1} e_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Então $v_1 \perp v_2$. Seja $S_2 = [v_1, v_2]$ subespaço gerado por v_1 e v_2. Como $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de S_2 então podemos aplicar o argumento em cima e formula $(**)$ para encontrar $\omega \in S_2$ tal que $v_3 = e_3 - \omega \in S_2^{\perp}$. Temos

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Então $v_3 \perp v_1$ e $v_3 \perp v_2$. Seja $S_3 = [v_1, v_2, v_3]$. Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal de S_3 podemos aplicar $(**)$ para encondrar $\omega \in S_3$ t.q.

$v_4 = e_4 - \omega \in S_3^{\perp}$. Temos

$$v_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle e_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle e_4, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

Continuando assim vamos construir uma

base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ~~é~~ ortogonal de S.
O processo de construção desta base ortogonal é chamado o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Assim terminamos a demonstração do teorema.

- $$\operatorname{proj}_S v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

onde $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de S,

é a melhor aproximação de v em S!

Exemplo $V = P_2(\mathbb{R})$, $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

$S = \{p(x) \mid p(0) = 0\} \subset V$

$v = x + 1 \notin S$

Encontrar $\operatorname{proj}_S v$.

- Primeiro vamos construir uma base ortogonal de S usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Precisamos descrever S:

$$p(x) = a+bx+cx^2 \in S \iff p(0)=0 \iff a=0$$

$$\Rightarrow S = \{ bx+cx^2 \mid b,c \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \{x, x^2\} \text{ is a basis of } S.$$

Vamos aplicar Gram-Schmidt: $v_1 = x$, $v_2 = x^2 - \text{proj}_x x^2 =$

$$= x^2 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\|x\|^2} \cdot x$$

$$\langle x^2, x\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}, \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow v_2 = x^2 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} x = x^2 - \frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow \{x, x^2 - \tfrac{3}{4}x\} \text{ é uma base ortogonal de } S$$

$$\Rightarrow \text{proj}_S v = \frac{\langle v, x\rangle}{\|x\|^2} x + \frac{\langle v, x^2 - \frac{3}{4}x\rangle}{\|x^2 - \frac{3}{4}x\|} (x^2 - \tfrac{3}{4}x)$$

$$\langle x+1, x\rangle = \int_0^1 (x+1)x\, dx = \frac{5}{6}$$

$$\langle x+1, x^2 - \tfrac{3}{4}x\rangle = \int_0^1 (x+1)(x^2 - \tfrac{3}{4}x) dx = -\frac{1}{24}$$

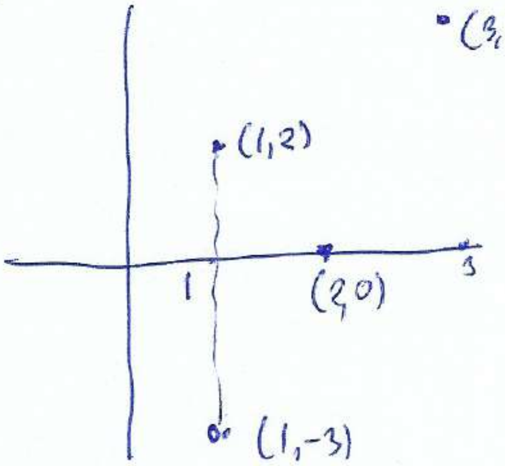
$$\|x^2 - \tfrac{3}{4}x\| = \langle x^2 - \tfrac{3}{4}x, x^2 - \tfrac{3}{4}x\rangle = \frac{1}{80}$$

$$\Rightarrow \text{proj}_S v = \frac{5/6}{1/3} x + \frac{-\frac{1}{24}}{\frac{1}{80}} (x^2 - \tfrac{3}{4}x) = -\frac{10}{3}x^2 + 5x \in S$$

$$v - \text{proj}_S v = x+1 + \frac{10}{3}x^2 - 5x = \frac{10}{3}x^2 - 4x + 1 \in S^\perp$$

Então $v = x+1 = \underbrace{\text{proj}_S v}_{\in S} + \underbrace{(v - \text{proj}_S v)}_{\in S^\perp} = \left(-\frac{10}{3}x^2 + 5x\right) + \left(\frac{10}{3}x^2 - 4x + 1\right)$

Exemplo Determinar a reta que melhor aproxima os pontos $(1,-3)$, $(2,0)$, $(1,2)$ e $(3,5)$ no plano.



$$y = ax+b$$

$$\begin{cases} -3 = a+b \\ 0 = 2a+b \\ 2 = a+b \\ 5 = 3a+b \end{cases}$$

sistema impossível

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{v} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

Não existem a, b!

Seja $S = [v_1, v_2]$. Nós queremos achar a melhor aproximação de v em S!

Considere $\mathbb{R}^4$ com produto interno usual. Então S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$!

$\{v_1, v_2\}$ é uma base de S, mas não é ortogonal.

Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortogonal:

$$w_1 = v_2 = (1,1,1,1)$$

$$w_2 = v_1 - \mathrm{proj}_{v_2} v_1 = v_1 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$$

$$= (1,2,1,3) - \frac{1+2+1+3}{4}(1,1,1,1) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$\{\omega_1, \omega_2\}$ é uma base de S ortogonal

Melhor aproximação de v em S:

$$\text{proj}_S v = \frac{\langle v, \omega_1\rangle}{\|\omega_1\|^2}\omega_1 + \frac{\langle v, \omega_2\rangle}{\|\omega_2\|^2}\omega_2 =$$

$$= \frac{4}{4}(1,1,1,1) + \frac{\frac{9}{4} - \frac{6}{4} + \frac{25}{4}}{\frac{44}{16}}\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) =$$

$$= \underbrace{(1,1,1,1) - \frac{28}{11}\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)} = a(1,2,1,3) + b(1,1,1,1)$$

$$\Rightarrow y = ax + b$$

<u>Corolário 1</u> Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja S um subespaço vetorial de dimensão finita. Então $V = S \oplus S^\perp$ (i.e. $V = S + S^\perp$ e $S \cap S^\perp = 0$)

<u>Demo</u> Sabemos que $S \cap S^\perp = \{0_V\}$. Portanto, precisamos mostrar que $V = S + S^\perp$, i.e. $\forall v \in V$ pode ser escrito como $v = u + \omega$, onde $u \in S$ e $\omega \in S^\perp$.

Como $\dim S < \infty$ podemos aplicar o teorema anterior

$\Rightarrow \exists\ \text{proj}_S v \in S$ e $v - \text{proj}_S v \in S^\perp \Rightarrow$

$$v = \text{proj}_S v + (v - \text{proj}_S v) \in S + S^\perp.$$

Corolário 2 Se S um subespaço de dimensão finita então $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Demo Já sabemos que $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$. Vamos mostrar que $(S^{\perp})^{\perp} \subset S$. ~~Seja~~ Pelo Corolário 1 temos $V = S + S^{\perp}$. Suponhamos $x \in (S^{\perp})^{\perp}$, ~~mas $x \in S$~~.
$x = s + y$, onde $s \in S$ e $y \in S^{\perp}$

Então $\langle x, S^{\perp} \rangle = 0$ e $x = s + y$, onde $s \in S$ e $y \in S^{\perp}$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle s+y, y \rangle = 0$$
$$\langle s+y, y\rangle = \langle s, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle y, y \rangle \Rightarrow y = 0_V$$
$$\langle s, y \rangle = 0$$
$$\Rightarrow x = s \in S. \Rightarrow (S^{\perp})^{\perp} \subset S.$$

Teorema (Teorema espectral)
Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com $\langle , \rangle$. Então todo operador simétrico $T: V \to V$ é diagonalizável. (logo toda matriz simétrica é diagonalizável)

~~Demo. Vamos provar por indução sobre a dimensão de V que existe uma base ortonormal B de V tal que $[T]_B$ é diagonal.~~