UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

ZAB1111 – ESTATÍSTICA BÁSICA

Prof. César Gonçalves de Lima cegdlima@usp.br

Aula 17 – COMPARAÇÃO DE MÉDIAS DE DUAS POPULAÇÕES NORMAIS

As hipóteses envolvidas nas comparações entre as médias de duas populações com distribuição normal podem ser escritas como:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ ou $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ ou $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (hipótese bilateral)

ou

$H_a: \mu_1 > \mu_2$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (hipótese unilateral à direita)

ou

$H_a: \mu_1 < \mu_2$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (hipótese unilateral à esquerda)

Porém, antes de compararmos as médias, precisamos saber se:

i) As variâncias são conhecidas? (Pouco comum...)

ii) Se são desconhecidas, podemos considerá-las iguais?

5.3. COMPARAÇÃO DE VARIÂNCIAS DE DUAS POPULAÇÕES

O problema envolve duas populações normais e independentes,

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad \text{e} \qquad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

das quais retiramos amostras de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente, com o objetivo de comparar suas variâncias, que são desconhecidas.

1) Hipóteses: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (ou $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ou $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$)

2) Estatística do teste:

$$F = s_1^2 / s_2^2 \tag{25}$$

que, sob H_0, tem distribuição $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$, onde s_1^2 e s_2^2 são as variâncias das amostras de tamanho n_1 e n_2, retiradas das populações X_1 e X_2, respectivamente.

Por conveniência, s_1^2 é a variância numericamente maior e s_2^2 é a variância numericamente menor.

3) Na Tábua IV obtemos f_c, com v_1 = (n_1–1) e v_2 = (n_2–1) graus de liberdade, tal que 0,05 = $P(F > f_c)$ e escrevemos a região crítica $RC = \{F \in R: F > f_c\}$, mesmo se H_a for bilateral.

4) Com as variâncias amostrais calculamos $F_{calc} = s_1^2/s_2^2$

5) Conclusão: se $F_{calc} \in RC$ rejeitamos H_0 (ao nível de significância α) e aceitamos a hipótese H_a: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ como verdadeira.

   Se $F_{calc} \notin$ RC, aceitamos H_0 como verdadeira.

Como o teste é baseado na distribuição F-Snedecor, temos uma restrição na escolha do nível de significância para o teste: somente encontraremos valores críticos tabelados (Tábua IV) para testes unilaterais à direita com α = 0,05 ou testes bilaterais com α = 0,10.

Nota: Sempre realizaremos testes bilaterais e o nível de significância de 10%

Se não rejeitarmos H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ nós devemos calcular uma estimativa da **variância comum** às duas populações, combinando as duas estimativas utilizando a fórmula:

$$s_{comum}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (26)$$

Exemplo 5.3. Num experimento com frangos de corte alojados em boxes foram comparadas duas rações (A e B). Avaliou-se o peso médio (em kg) das aves dos boxes aos 49 dias de idade. Os resultados encontrados foram os seguintes:

Ração A:	2,10	2,34	2,24	2,07	2,10	2,03	2,20
Ração B:	1,89	1,92	1,85	1,82	1,96	1,94	

Com base nesses dados nós podemos afirmar ao nível de significância $\alpha = 10\%$, que os pesos dos dois grupos de aves são igualmente homogêneos, isto é, têm variâncias iguais?

Resolução:

- Hipóteses: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ *versus* H_a: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- Das duas amostras: $s_1^2 = 0{,}0121$ $(n_1 = 7)$ e $s_2^2 = 0{,}0029$ $(n_2 = 6)$

- Estatística do teste: $F = s_1^2/s_2^2$, que tem distribuição $F(6; 5)$.
- α = 0,10, da Tábua IV temos f_c = 4,95 ⇒ $RC = \{F \in R: F > 4,95\}$

  F_{calc} = 0,0121/0,0029 = 4,17.

  Como $F_{calc} \notin RC(10\%)$, não rejeitamos H_0 e concluímos (α = 10%) que as variâncias dos pesos dos dois grupos de frangos são iguais.

- Uma estimativa da variância (comum) dos pesos dos dois grupos de frangos de corte é:

$$s_{comum}^2 = \frac{(7-1)0,0121 + (6-1)0,0029}{(7+6-2)} = 0,0079 kg^2$$

5.4. COMPARAÇÕES DAS MÉDIAS DE DUAS POPULAÇÕES INDEPENDENTES

As hipóteses envolvidas nas comparações entre as médias de duas populações com distribuição normal podem ser escritas:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ (ou $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$)

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ (ou $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$) (hipótese bilateral)

ou

$H_a: \mu_1 > \mu_2$ (ou $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$) (hipótese unilateral à direita)

ou

$H_a: \mu_1 < \mu_2$ (ou $H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$) (hipótese unilateral à esquerda)

Se as variâncias σ_1^2 e σ_2^2 forem conhecidas (**pouco comum!**) a estatística do teste é

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

que tem distribuição $N(0; 1)$.

É mais comum desconhecermos tanto as médias quanto as variâncias populacionais e antes de compararmos as médias, precisaremos testar se as variâncias das duas populações podem ser consideradas iguais ou não, usando o teste F definido na seção 5.3.

A partir de amostras independentes teremos as informações:

X_1: n_1 elementos, média ($\bar{x}_1$) e variância amostral (s_1^2)

X_2: n_2 elementos, média ($\bar{x}_2$) e variância amostral (s_2^2)

5.4.1. COMPARAÇÕES ENTRE AS MÉDIAS DE DUAS POPULAÇÕES NORMAIS INDEPENDENTES COM VARIÂNCIAS DESCONHECIDAS MAS IGUAIS.

Estatística do teste:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_{comum}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad (29)$$

onde s_{comum}^2 é a estimativa da variância comum das duas populações e calculada através de (26). Sob H_0 a estatística T tem distribuição t com (n_1 + n_2 – 2) graus de liberdade.

Um intervalo de confiança para a diferença entre as médias:

$$IC(\mu_1 - \mu_2; 100\gamma\%) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_c \sqrt{s^2_{comum}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad (30)$$

onde t_c é o valor crítico obtido na Tábua I, tal que $\gamma = P(-t_c < T < t_c)$.

Com os dados do Exemplo 5.3 podemos afirmar ($\alpha = 5\%$) que as aves alimentadas com a ração A são mais pesadas que as aves alimentadas com a ração B?

Já sabemos que as variâncias dos dois grupos foram consideradas iguais e que $s^2_{comum} = 0{,}0079 kg^2$. Vamos comparar as médias:

H_0: $\mu_A = \mu_B$ (ou H_0: $\mu_A - \mu_B = 0$)

H_a: $\mu_A > \mu_B$ (ou H_a: $\mu_A - \mu_B > 0$ (hipótese unilateral à direita)

Das amostras: $n_A = 7, \bar{x}_A = 2{,}15kg$ e $n_B = 6, \bar{x}_B = 1{,}90kg$

$\alpha = 5\%$ e $n_A + n_B - 2 = 11\ gl \Rightarrow RC(5\%) = \{t \in R | t > 1{,}796\}$

Estatística do teste: $t_{calc} = \frac{(2{,}15-1{,}90)}{\sqrt{0{,}0079\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)}} = 5{,}06$

Como $t_{calc} \in RC(5\%)$ rejeitamos H_0 e concluímos que as aves alimentadas com a ração A são mais pesadas que aquelas alimentadas com a ração B.

Exemplo 5.4. As soluções químicas Q1 e Q2 foram comparadas quanto ao valor do pH. A análise de 21 amostras da solução Q1 acusou $\bar{x}_1 = 7{,}68$ e $s_1 = 0{,}016$, enquanto a análise de 31 amostras de Q2 acusou $\bar{x}_2 = 7{,}23$ e $s_2 = 0{,}022$. Ao nível $\alpha = 1\%$ de significância, podemos afirmar que as duas soluções têm pH's médios diferentes?

1º Passo. Comparar as variâncias das duas populações.

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad versus \quad H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estatística do teste: $F = s_2^2/s_1^2$, que sob H_0, tem distribuição F com v_1 = 31–1 = 30 g.l. e v_2 = 21–1 = 20 g.l.

Fixando $\alpha = 0{,}10$ (teste bilateral) e usando a Tábua IV temos f_c = 2,04 $\Rightarrow$ $RC(10\%) = \{F \in R: F > 2{,}04\}$

Das amostras: $F_{calc} = \dfrac{(0{,}022)^2}{(0{,}016)^2} = 1{,}89$

Como $F_{calc} \notin RC$, não rejeitamos H_0 e concluímos (α = 10%) que as variâncias do pH's das duas soluções podem ser consideradas iguais.

Uma estimativa da variância comum do pH das duas soluções é:

$$s^2_{comum} = \frac{(31-1)0{,}0222^2+(21-1)0{,}016^2}{(31+21-2)} = 0{,}00039$$

2º Passo. Comparação das médias das duas populações.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ $versus$ H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$ **(teste bilateral)**

Estatística do teste tem distribuição t com $21+31-2 = 50$ gl.

$\alpha = 0{,}01$, da Tábua III: $RC(1\%) = \{t \in R: |t| > 2{,}678\}$.

Das amostras: $T_{calc} = \dfrac{(7{,}68-7{,}23)-0}{\sqrt{0{,}00039\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}\right)}} = \dfrac{0{,}45}{0{,}00558} = 80{,}645$

Como $T_{calc} \in RC(1\%)$ rejeitamos H_0 e concluímos (α = 1%), que os pH's médios das soluções devem ser considerados diferentes.

5.4.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS MÉDIAS DE DUAS POPULAÇÕES NORMAIS COM VARIÂNCIAS DESCONHECIDAS E DIFERENTES

Caso a hipótese H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ seja rejeitada, não existe um teste exato para comparar as médias das populações normais.

Um teste aproximado para comparar as médias utiliza a estatística:

$$\mathrm{T}^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}} \qquad (31)$$

que tem distribuição aproximada t-Student com v graus de liberdade, em que v é calculado pela **Fórmula de Sattertwaite** e tem a seguinte expressão:

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} \qquad (32)$$

Um intervalo de confiança aproximado para a diferença entre as médias, μ_1 e μ_2, pode ser obtido através da expressão:

$$\text{I.C.}^*(\mu_1 - \mu_2;\ 100\gamma\%) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_c^* \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \qquad (33)$$

t_c^* é o valor crítico obtido na Tábua III, tal que $\gamma = P(-t_c^* < T^* < t_c^*)$, com $T^* \sim t_v$, em que o número de graus de liberdade, v, é calculado com a Fórmula de Sattertwaite.

Exemplo 5.5. Queremos testar se os dois tipos de vigas de aço, A e B, têm a mesma resistência média (em t/cm^2), ao nível α = 5% de significância. Avaliando-se 15 vigas do tipo A e 20 vigas do tipo B, os resultados foram:

Viga	n	$\bar{x}$	s^2
A	15	70,5	81,6
B	20	84,3	246,3

Resolução:

a) Comparação das variâncias: H_0: $\sigma_B^2 = \sigma_A^2$ $versus$ H_a: $\sigma_B^2 \neq \sigma_A^2$

$F = s_B^2/s_A^2$, que sob H_0, tem distribuição $F(19; 14) \Rightarrow$ fixando $\alpha =$ 0,10, da Tábua IV tem-se RC = {$F \in$ R: F > 2,40}

F_{calc} = 246,3/81,6 = 3,02 $\in RC(10\%) \Rightarrow$ rejeitamos H_0 e concluímos que as variâncias das resistências dos dois tipos de vigas são diferentes.

b) Comparação das médias: H_0: $\mu_A = \mu_B$ versus H_a: $\mu_A \neq \mu_B$

Como as variâncias populacionais foram consideradas diferentes, usamos na comparação de médias a estatística T* que tem ν = 315,24/10,10 $\cong$ 31 gl.

Para $\alpha = 5\%$ temos $t_c^* = 2{,}042 \Rightarrow RC(5\%)$ = {T* $\in$ R: $|$T*$|$ > 2,042}

Das amostras: $T_{calc}^* = \dfrac{(70{,}5 - 84{,}3) - 0}{\sqrt{\left(\frac{81{,}6}{15} + \frac{246{,}3}{20}\right)}} = \dfrac{-13{,}8}{4{,}2137} = -3{,}28 \in \text{RC}(5\%) \Rightarrow$

rejeitamos H_0 e concluímos que as resistências médias das vigas A e B são diferentes.

5.4.3 COMPARAÇÕES ENTRE AS MÉDIAS DE DUAS POPULAÇÕES NORMAIS QUANDO AS OBSERVAÇÕES SÃO PAREADAS

A comparação de médias de duas populações normais pode ser prejudicada pela ação de fatores externos que não podem ser controlados pelo pesquisador.

Exemplo: Um tratamento com suplementação de alfafa (A), usado na alimentação de coelhos pode ser considerado melhor que o tratamento sem suplementação (B), somente porque os animais que receberam o tratamento A são mais novos que os animais que receberam o tratamento B e não porque a suplementação realmente melhora o desempenho dos coelhos.

Este problema pode ser contornado utilizando-se **pares de indivíduos** homogêneos.

Neste exemplo podemos utilizar **pares de coelhos** semelhantes quanto à raça, ninhada, peso inicial, sexo e idade:

- Um dos coelhos de cada par é escolhido ao acaso e recebe o Trat-A; o outro recebe o Trat-B.

Com isso conseguimos um **maior controle** de fatores secundários que podem influenciar os resultados da comparação das médias.

Outro artifício, bastante utilizado em experimentos farmacêuticos, consiste em fazer as observações da variável nos mesmos indivíduos **antes** e **depois** da aplicação do tratamento.

Caso geral: Para comparar as médias de duas populações de dados pareados X e Y, utilizaremos n pares de valores $(x_i; y_i)$, i = 1, 2,…, n.

- Definimos uma nova variável: $D = X - Y$.

  Consequentemente, ao invés de uma amostra de n pares de valores $(x_i;\ y_i)$ trabalharemos com uma amostra de n diferenças d_1, d_2,…, d_n, que usaremos na comparação das médias das duas populações.

- Se as variáveis X e Y têm distribuições normais então

$$\overline{D} \sim N(\mu_D; \sigma_D^2/n)$$

  Com os dados amostrais nós calculamos as estimativas da média e da variância das diferenças utilizando:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \quad \text{e} \quad s_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2$$

Qualquer hipótese feita sobre o parâmetro μ_D corresponde a uma hipótese feita sobre a diferença das médias das populações X e Y.

Por exemplo, se $D = X - Y$, a hipótese H_a: $\mu_D > 0$ corresponde a:

$$H_a: \mu_X - \mu_Y > 0 \quad \text{ou } H_a: \mu_X > \mu_Y$$

- De um modo geral, as hipóteses podem ser escritas como:

  H_0: $\mu_D = \mu_0$ (onde μ_0 é um valor numérico qualquer)

  H_a: $\mu_D \neq \mu_0$ ou H_a: $\mu_D > \mu_0$ ou H_a: $\mu_D < \mu_0$

- A estatística do teste é definida como:

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_0}{\sqrt{s_D^2/n}} \quad \text{que sob } H_0 \text{ tem distribuição } t_{(n-1)}$$

Um intervalo de confiança para a diferença de médias $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$, com uma confiança γ pode ser obtido através de:

$$IC(\mu_D;\, 100\gamma\%) = \left[\bar{d} - t_c\sqrt{s_D^2/n}\,, \bar{d} + t_c\sqrt{s_D^2/n}\right] \qquad (35)$$

onde t_c é o valor crítico obtido da Tabela III, tal que $P(-t_c < T < t_c) = \gamma$ e T tem distribuição $t_{(n-1)}$.

Exemplo 5.6. Com o objetivo de testar (α = 5%) se a suplementação de alfafa aumenta o ganho médio de peso de coelhos em mais de 0,10kg, foram utilizados 8 pares de coelhos, resultando em:

Par nº	1	2	3	4	5	6	7	8
X (com)	0,72	0,90	0,67	0,83	0,67	0,93	0,80	0,75
Y (sem)	0,32	0,49	0,51	0,45	0,70	0,52	0,35	0,60

Resolução:

- Admitindo que: $D = X - Y \ (Com - Sem)$
- Vamos testar: H_0: μ_D = 0,10 versus H_a: μ_D > 0,10
- Estatística: T = $\frac{\bar{d} - 0{,}10}{\sqrt{s_d^2/8}}$, que sob H_0, tem distribuição $t_{(7)}$

- Tábua III, para α = 5%, t_c = 1,895 ⇒ $RC(5\%)$ = {t∈R: t > 1,895}.

Par nº	1	2	3	4	5	6	7	8
X (com)	0,72	0,90	0,67	0,83	0,67	0,93	0,80	0,75
Y (sem)	0,32	0,49	0,51	0,45	0,70	0,52	0,35	0,60
D = X – Y	0,40	0,41	0,16	0,38	-0,03	0,41	0,45	0,15

- Das amostras: $\bar{d}$ = 0,29 e s_d^2 = 0,0305

$$\Rightarrow t_{calc} = \frac{0{,}29-0{,}10}{\sqrt{0{,}0305/8}} = 3{,}08$$

Como $t_{calc} \in RC(5\%)$ nós rejeitamos a hipótese H_0 e concluímos ao nível de 5% de significância, que a suplementação de alfafa aumenta o ganho médio de peso dos coelhos em mais de 0,10kg.

- $IC(\mu_D; 90\%) = 0{,}29 \pm 1{,}895\sqrt{0{,}0305/8}$ = [0,17; 0,41] kg

  Este intervalo contém o verdadeiro aumento de ganho médio de peso de coelhos resultante da suplementação com alfafa, com uma confiança de 90%.