MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Lista de Exercícios 4: Séries

1. Verifique que cada série a seguir converge e obtenha a soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{(-4)^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{10^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

   Soluções: Em (a) e (b) use a soma de séries geométricas. Em (c) e (d) obtenha uma expressão para s_n e calcule o limite.

   Em (d) use que $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1/2}{n}-\dfrac{1/2}{n+2}$

2. Seja uma sequência qualquer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ converge. Qual a relação dessa série com a representação decimal de um número real?

3. Vimos em aula que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada. Portanto a sequência converge e seu limite é denotado por e, número de Euler. Vimos em aula que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $y_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ também é crescente e limitada, portanto convergente.

   (a) Prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$. (Dica: consulte livros da bibliografia). Portanto, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

   (b) Obtenha as somas: (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}$

4. Verifique se cada série abaixo converge ou diverge. Justifique sua resposta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[3]{n^2+4}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$, $k\in\mathbb{N}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,3^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$, a >0 (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,3^n}{n^n}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{1/n}}{n^n}$ (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{n!\,n}$

   (n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$ (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

   Soluções:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ converge. Sugestão: use o critério da integral ou compare com a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[3]{n^2+4}}$ diverge. Sugestão: compare com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ converge. Sugestão: compare com $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$ diverge para todo $k \in \mathbb{N}$. Sugestão: para $k \in \mathbb{N}$ fixado, calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^k}$ e conclua que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$ converge. Sugestão: compare com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}$ converge. Sugestão: use o critério da razão.

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge para todo $a > 0$. Sugestão: use o critério da razão.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, 3^n}{n^n}$ diverge. Sugestão: use o critério da razão e mostre que $\lim \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$.

5. Seja p um número real positivo. Encontre todos os valores de p para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ é convergente.

Solução: Vamos utilizar o Critério da Integral. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^p}$, $x \geq 2$. Temos:

(i) f é contínua pois é quociente de contínuas com denominador não nulo;

(ii) $f(x) > 0$ pois $\ln(x) > 0$ para todo $x \geq 2$;

(iii) $f'(x) = -\dfrac{\ln(x) + p}{x^2(\ln(x))^{p+1}}$. Portanto, f será decrescente se $\ln(x) + p > 0$ para todo $x \geq 2$. (*)

Para $p \neq 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{(\ln(x))^{-p+1}}{-p+1}\right|_2^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{(\ln(t))^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln(2))^{-p+1}}{-p+1} \right) \\
&= \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{(\ln(t))^{p-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{p-1}} \right)
\end{aligned}$$

- Se $p > 1$, vale (*) e teremos $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\ln(t))^{p-1}} = 0$. Portanto, $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(\ln(2))^{p-1}} < \infty$

  Pelo Critério da Integral, como $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ converge, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln(n))^p}$ converge.

- Se $p < 1$, teremos $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\ln(t))^{p-1}} = +\infty$ e a integral será divergente. Logo, a série também será divergente.

- Se $p = 1$, $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln(x))}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln(\ln(x)) \Big|_2^t = +\infty$ e, portanto, a série também será divergente.

<u>Conclusão</u>: a série será convergente se e somente se $p > 1$.

6. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge, então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

<u>Verdadeira.</u> Suponha que $\sum (a_n + b_n)$ converge. Então $\sum (a_n + b_n) - \sum a_n = \sum (a_n + b_n - a_n) = \sum b_n$ converge, o que contradiz a hipótese.

(b) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ e $\sum a_n$ diverge, então $\sum (ka_n)$ diverge.

Verdadeira. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n)$ converge. Então $\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{k}ka_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o que contradiz a hipótese.

(c) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem, então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.
Falsa. As séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{-1}{n}$ divergem, mas $\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right) = 0$ converge.
Outro exemplo: $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ divergem (para a segunda segue de (a)), mas $\sum \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

(d) Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum |a_n|$ diverge.
Verdadeiro. Se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n$ converge.

(e) Se $\sum a_n$ diverge e se $a_n \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum b_n$ diverge.

Falsa. Tome $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(f) Se $\sum a_n$ converge e $a_n \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum b_n$ converge.

Falsa. Tome $b_n = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

7. Verifique se cada série abaixo converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge. Justifique sua resposta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cos n}{(n!)^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+1}{n^3+3}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n-1)^n}{(2n^2+1)^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^6}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{n^2+3}$

Algumas soluções:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente. Sugestão: use o critério das séries alternadas para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge e o critério da integral para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|$ diverge.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ converge absolutamente. Sugestão: use o critério da integral.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!\cos n}{(n!)^3}$ converge absolutamente. Sugestão: compare a série dos módulos com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^3}$ e use o critério da razão para mostrar que esta converge.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge condicionalmente. Sugestão: use o critério das séries alternadas para mostrar que a série converge, e compare a série dos módulos com $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+1}{n^3+3}$ convegre condicionalmente. Sugestão: verifique que os termos da série decrescem a partir de $n = 2$ e use o critério das séries alternadas para mostrar que $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+1}{n^3+3}$ converge (logo, a série "começando de $n = 1$" também converge). Para ver que a série dos módulos diverge, compare com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$.

8. (a) Mostre que se $\sum a_n$ é uma série de números positivos convergente e se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de números positivos então $\sum a_n b_n$ é convergente.

Solução: Sendo $(b_n)_n$ uma sequência de termos positivos e limitada, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq b_n \leq k$ para todo n. Também sabemos que $a_n \geq 0$ para todo n. Portanto,

$$0 \leq a_n b_n \leq a_n k, \text{ para todo } n.$$

Como a série $\sum a_n$ é convergente, a série $\sum (a_n k) = k \sum a_n$ também converge.

Pelo critério da Comparação, temos que a série $\sum (a_n b_n)$ é convergente.

(b) Mostre com um exemplo que o resultado de (a) é falso sem a hipótese de limitação de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solução: Sejam $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $b_n = n$ para todo n. Sabemos que a série $\sum a_n = \sum \dfrac{1}{n^2}$ é convergente e a sequência $(b_n)_n$ não é limitada.

A série $\sum (a_n b_n) = \sum \left(\dfrac{1}{n^2} \cdot n\right) = \sum \dfrac{1}{n}$ é divergente.

(c) Se $\sum a_n$ é uma série convergente, sendo a_n não necessáriamente positivos, e se $(b_n)_n$ é sequência limitada de números positivos então $\sum a_n b_n$ é convergente? Justifique.

Solução: Sejam $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ e $b_n = 1 + (-1)^n$. Temos:

- $\sum a_n$ converge pois $\sum a_n$ é a série harmônica alternada;
- $b_n = 0$ se n é ímpar e $b_n = 2$ se n é par. Logo, $0 \leq b_n \leq 2$, ou seja $(b_n)_n$ é limitada;
- $a_n b_n = 0$ se n é ímpar e $a_n b_n = \dfrac{2}{n}$ se n é par.

Portanto, $\sum a_n b_n = 0 + \dfrac{2}{2} + 0 + \dfrac{2}{4} + 0 + \dfrac{2}{6} + \cdots = \sum \dfrac{1}{k}$, que é divergente.

Esse exemplo mostra que a resposta é não.

(d) Se $\sum a_n$ é uma série de números positivos convergente então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$ também é convergente?

Solução: Observamos que $0 < \dfrac{n+1}{n} \leq 2$ para todo n. Logo, a sequência dada por $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ é limitada. Sendo $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos, podemos concluir, pelo item (a), que a série $\sum \left(\dfrac{n+1}{n}\right) a_n$ é convergente.

(e) Usando (a) mostre que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de números positivos convergentes, então $\sum a_n b_n$ é convergente. Note que, em particular, $\sum a_n^2$ é convergente.

Solução: Sendo $\sum b_n$ uma série convergente de termos positivos, sabemos, pelo critério do termo geral, que $\lim b_n = 0$. Portanto, existe n_0 tal que $0 \leq b_n \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Fazendo $k = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, 1\}$ podemos concluir que $0 \leq b_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que a sequência $(b_n)_n$ é limitada. Pelo item (a), a série $\sum (a_n b_n)$ é convergente.

Em particular, vale o resultado para $b_n = a_n$.

(f) Encontre exemplos de séries que satisfazem as hipóteses de (e) e tais que que $\sum a_n b_n \neq \sum a_n \cdot \sum b_n$.

Solução: Para provar que o produto das somas de duas séries é diferente da soma do produto de seus termos, temos que procurar exemplos em séries cujas somas sabemos calcular. Essas são raras! Vamos procurar exemplos nas séries geométricas!

Sejam $r = \frac{1}{3}$ e $s = \frac{1}{5}$. Temos:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$ e, portanto, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n\right) = \frac{15}{8}$.

Por outro lado, $\displaystyle\sum (r^n \cdot s^n) = \sum \left(\frac{1}{15}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{15}} = \frac{15}{14}$

9. Determine todos os valores de x real para os quais as séries abaixo convergem. Justifique as respostas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$