Exercícios de Cálculo.

Derivada de funções em várias variáveis

Regra da cadeia

Todas as funções são supostas de classe C^1 ou diferenciáveis, quando necessário

1. Calcule $\frac{dz}{dt}$ pelos dois processos descritos no Exemplo 2. do livro do Guidorizzy Vol 2.

   a) $z = \sin xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$.

   b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \sin(t)$ e $y = \cos(3t)$.

   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \sin(3t)$ e $y = \cos(3t)$.

2. Seja $g(t) = f(3t, t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termo das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \left(\frac{1}{3}\right)$

Funções definidas implícitamente

1. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implícitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? em caso afirmativo, expresse $\frac{df}{dx}$ em termos de x e y.
   (Sugestão: Observe que $(0, \sqrt[3]{4})$ satisfaz a equação e utilize o teorema das funções implícitas (caso $F(x, y) = 0$).)

Interpretação geométrica do gradiente

1. Dada uma curva que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) = \vec{0}$.

   a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.

   b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

2. Determine a equação da reta tangente á curva de nível dada, no ponto dado

   a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.

   b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$.

Aplicações do Gradiente

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal á superfície dada, no ponto

   a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

   b) $2xyz = 3$ em $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$.

   c) $ze^{x-y} = z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$.

2. A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implícitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

3. Determine um plano que seja tangente á superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

Derivada direcional

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, sendo dados:

   a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$ e $\vec{u}$ o vetor de $2\vec{i} + \vec{j}$.

   b) $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ e $\vec{u}$ o vetor de $(3,4)$.

   c) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $(x_0, y_0) = (3,3)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   d) $f(x,y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ e $\vec{u}$ o vetor de $\vec{i} + \vec{j}$.

2. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rápidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1,1)$.

   b) $f(x,y) = \ln(\|(x,y)\|)$ em $(1,-1)$.

   c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

3. Seja $f(x,y) = x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo cescimento de f, no ponto $(1,1)$.

4. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + 2y^2}$ no ponto $(2,2)$ e na direção

   a) $\vec{v} = (1,2)$.

   b) $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

5. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}$, no ponto $(-1,1)$ e na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$.

6. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em °C.) Um individuo encontra-se na posição $(3,2)$ e pretende dar um passeio.

   a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3,2)$.

   b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura?

   c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01$km na direção encontrada no item *b*)?

   d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe $0,01$km na direção $\vec{j}$?

7. Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção $\vec{w}$ indicados

   a) $f(x,y,z) = xyz$ em $(1,1,1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

   b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1,2,-1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Derivadas parciais de ordem superior
Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem

a) $f(x,y,z) = x^3 y^2$.

b) $z = e^{x^2-y^2}$.

c) $z = \ln(1+x^2+y^2)$.

d) $g(x,y) = 4x^3y^4 + y^3$.

Extremos locais
Selecione os candidatos a extremo local, sendo $f(x,y) =$

a) $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$.

b) $x^2 - y^2 + 3xy - x + y$.

c) $x^3 - y^2 + xy + 5$.

d) $x^3 + y^3 - xy$.

e) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$.

f) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

Fórmula de Taylor

1. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado
   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.
   b) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$.
   c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.
2. Calcule um valor aproximado e avalie o erro.
   a) $\sqrt{4,001}$.
   b) $\sin(0,02)$.
   c) $\cos(0,01)$.
3. Determine o polinômio de Taylor, de segunda ordem, de f em volta de x_0 dado.
   a) $f(x) = \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$.
   b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$.
   c) $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = 0$.
   d) $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = 0$.
4. Utilizando o polinômio de Taylor de segunda ordem, calcule um valor aproximado e avalie o erro.
   a) $\sqrt{3,9}$.
   b) $\sin(0,1)$.
   c) $\cos(0,2)$.
5. Determine o polinômio de Taylor de quinta ordem em volta do x_0 dado.
   a) $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = 0$.
   b) $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = 0$.