Axiomas de ZF

- Vamos aqui falar sobre a axiomatização da Teoria dos Conjuntos feita por Zermelo-Frankel.

- Desde os trabalhos de Cantor (1874-1897) e Frege (1893-1903) aceitava-se se:

$P(x)$ é uma propriedade, então

$\exists$ o conjunto $\{x : P(x)\}$ (definição de conjunto)

- Entretanto no início do século XX, foi formulado o:

Paradoxo de Russel: Seja $P(x)$: "$x \notin x$" e defina $R = \{x : x \notin x\}$.

Mas daí $R \in R \leftrightarrow R \notin R$.

- Zermelo, em 1908, contornou o problema com:

"dada uma propriedade $P(x)$ e um conjunto A temos que $\{x \in A : P(x)\}$ é conjunto"

- Em 1922 - Frankel acrescentou axiomas a axiomática de Zermelo

Com isso formulou-se a axiomática conhecida hoje em dia como ZF (Zermelo - Frankel)

- Ideia básica: não se define conjunto da forma "um conjunto é..."; os conjuntos são introduzidos axiomaticamente (análogo ao que se faz na geometria)

Obs: Em 1925, von Neumann deu outra solução para o paradoxo de Russel, onde se tem o conceito de classes, dando origem a Teoria das Classes (Neumann - Bernays).
Não estudaremos esta teoria.

- Axiomas de ZF:

- Os axiomas precisam garantir:
  - existência de conjuntos
  - propriedades básicas
  - como construir novos conjuntos a partir de outros

(∴ teremos três "tipos" de axiomas)

Obs: Não irei me preocupar em ser muito formal na hora de escrever os axiomas. A linguagem da Teoria dos Conjuntos tem apenas o símbolo predicativo $\in$.

- Começaremos com um axioma sobre propriedade básica de conj.

\- Propriedade básica: $A = B \leftrightarrow$ A e B tem os mesmos elementos.

Assim temos nosso 1º axioma:

1) Axioma da Extensionalidade:

"Se todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, então $A = B$", ou seja,

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

- Precisamos agora garantir a existência de algum conjunto:

2) Axioma do Vazio (ou Axioma de Existência):

"Existe um conjunto que não tem nenhum elemento", ou seja,

$$\exists A (\forall x (x \notin A))$$

Obs: Pelo Axioma da Extensionalidade, esse conjunto é único. E é chamado de conjunto vazio e denotado por $\emptyset$.

• Precisamos agora ter como construir novos conjuntos a partir de outros. Os axiomas mais simples nesse sentido são:

3) <u>Axioma do Par</u> (não-ordenado)

"$\forall$ conjuntos A, B existe um conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$",

ou seja,

$$\forall A \forall B \exists C \, (\forall x \, (x \in C \leftrightarrow x = A \text{ ou } x = B))$$

<u>Obs</u>: Esse conjunto é único (pela extensionalidade)

<u>Def</u>: Definimos esse conjunto como sendo o <u>par não ordenado</u> de A e B. Notação: $\{A, B\}$, e se $A = B$, escrevemos $\{A, B\} = \{A\}$.

<u>Exemplos</u>: Segue do Axioma do Vazio e do Axioma do Par que:

$\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, ...

são conjuntos

Note que, só com esses dois axiomas, podemos construir infinitos conjuntos.

4) Axioma da união

"Para qualquer conjunto S, existe um conjunto X tal que $x \in X$ se e somente se $x \in A$ para algum $A \in S$",

ou seja,

$$\forall S \exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \exists A (x \in A \text{ e } A \in S))$$

- De novo, pela extensionalidade, X é único e definimos:

Def: O conjunto X do enunciado do Axioma da União é chamado de união de S e denotado por $\bigcup S$.

Exemplo: Temos que $S = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ é conjunto pelo Axioma do Par (aplicado várias vezes) e pelo Ax do Vazio. ($\emptyset$ é conj $\therefore$ $\{\emptyset\}$ é conj. Logo $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é conj etc)

Logo $\bigcup S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ é conjunto.

Exercícios:

1) Mostre que se A e B são conjuntos então $A \cup B$ é um conjunto.

Solução:

Pelo Axioma do Par, como A e B são conjuntos, segue que $\{A, B\}$ é um conjunto

Logo pelo Axioma da União $\bigcup\{A, B\}$ é um conjunto

Mas já vimos que $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$ $\therefore$ $A \cup B$ é um conjunto

2. Mostre que $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ é um conjunto.

<u>Solução:</u>

Pelo Axioma do Vazio, $\emptyset$ é um conjunto.

Logo pelo Axioma do Par, $\{\emptyset\}$ é um conjunto

Usando o Axioma do Par novamente temos que

- $\{\{\emptyset\}\}$ é um conjunto (usando para $A = B = \{\emptyset\}$) e
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é um conjunto (usando para $A = \emptyset$ e $B = \{\emptyset\}$).

De novo pelo Axioma do Par teremos que

$\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ e $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ são conjuntos

Usando agora o exercício 1 temos que

$$\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

é um conjunto, como queríamos mostrar. //

- Ainda temos:

5) <u>Axioma das Partes</u>

"Dado um conjunto S, existe um conjunto P tal que $x \in P$ se e somente se $x \subset S$", ou seja,

$$\forall S \exists P (\forall x (x \in P \leftrightarrow x \subset S))$$

- P é único pela extensionalidade e $\therefore$ podemos definir

<u>Def</u>: O conjunto P dado pelo Axioma das Partes é chamado de <u>conjunto das partes</u> de S e é denotado por $\mathcal{P}(S)$.

Exemplo: Como $\emptyset$ é um conjunto pelo Axioma do Vazio, segue que, pelo Ax dos Partes,

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ é conjunto e i, pelo Ax das Partes

$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é conjunto e novamente pelo

Ax. das Partes temos que

$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ é um

conjunto.

(Obs: Poderíamos também ter usado o Axioma do Par para concluir que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é conjunto).

- Antes de falar do próximo "axioma", vamos voltar agora para a ideia intuitiva de conjuntos:

- Queremos agora construir conjuntos que satisfaçam uma determinada propriedade $P(x)$ (algo mais próximo da ideia intuitiva de conjunto).

Por causa do Paradoxo de Russel, não podemos pegar $\{x : P(x)\}$.

Mas podemos pegar os x tais que vale $P(x)$ restringindo $x \in A$, onde A é um conjunto.

- Logo para nosso próximo axioma, gostaríamos de algo do tipo:

"$\forall$ propriedade $P(x)$ e para todo conjunto A existe um conjunto B tal que $x \in B \leftrightarrow (x \in A$ e $P(x))$"

<u>Problema</u>: Essas propriedades $P(x)$ são fórmulas e não podemos quantificar sobre fórmulas.

- Então não poderemos ter um único axioma, teremos que ter um axioma para cada fórmula, ou seja, um "esquema de axiomas":

6) <u>Esquema de Axiomas de Separação</u>

Seja $P(x)$ uma propriedade (fórmula) de x.

"Para qualquer conjunto A, existe um conjunto B tal que $x \in B$ se e somente se $x \in A$ e $P(x)$",

ou seja, $\forall A\, \exists B\, \forall x\, (x \in B \leftrightarrow (x \in A$ e $P(x))$

<u>Obs</u>: Esse conjunto é único e usamos a notação:

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Obs: $P(x)$ pode depender de parâmetros $q_1, \ldots, q_n$ (que são conjuntos) e daí pode-se escrever $P(x, q_1, \ldots, q_n)$.

Exemplo: Se A e B são conjuntos, então $A \cap B$ é conjunto. De fato:

Seja $P(x)$: "$x \in B$"

Daí $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ é conjunto pelo Ax de Separação.

(De forma "parecida" pode mostrar que $A \setminus B$ e que $A \Delta B$ são conjuntos, veja exercícios da Lista 6).

. Os seguintes axiomas completam a lista:

7) Esquema de Axiomas de Substituição:

Seja $P(x,y)$ uma propriedade tal que $\forall x \exists y$ tq. $P(x,y)$ vale e y é único. Então $\forall$ conjunto A existe um conjunto B tal que

$\forall x \in A \exists y \in B$ tal que $P(x,y)$ vale.

Consequência: Existe o conjunto imagem de uma função.

8) Axioma do Infinito:

"Existe um conjunto infinito" ou
"Existe um conjunto indutivo" (definido antes)

(aparece enunciado das duas formas, mas da forma como fizemos a teoria, o enunciado que deve ser usado é "Existe um conjunto indutivo", pois precisamos da existência de indutivo para definir $\mathbb{N}$ e só depois definimos o que é um conjunto infinito).

Obs: Note que os axiomas anteriores podem ser usados para construir infinitos conjuntos, mas não um conjunto infinito.

9) Axioma da Regularidade:

Todo conjunto não-vazio tem um elemento minimal com relação ao $\in$, ou seja,

$$\forall x\ (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \text{ tal que } x \cap y = \emptyset)$$

Consequência: Não pode ter $x \in x$ (senão tome $\{x\}$)

. Note que 8) é nosso 2º ax. de existência de conjunto e 9) é o 2º de propriedade básica. Os outros são todos sobre como construir conj. a partir de outros conj.

- Para finalizar faltou falar de algo que não seja conjunto. Será que existe?

- O próprio exercício nos diz que sim!

<u>Exercício</u>: Mostre que $\forall A\ \exists B$ tal que $B \notin A$, ou seja, não existe o conjunto de todos os conjuntos.

<u>Solução (Dica)</u>: Considere $B = \{x \in A : x \notin x\}$. Agora é só verificar que $B \notin A$.