Exercícios de Cálculo.

Funções em várias variáveis

Derivada parciais

1. Determine as derivadas parciais

   a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

   b) $z = \cos(xy)$

   c) $z = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

   d) $f(x,y) = e{-}x^2 - y^2$

   e) $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

   f) $z = (xy)e^{(xy)}$

   g) $f(x,y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

   h) $z = \arctan(\frac{x}{y})$

   i) $g(x,y) = x^y$

   j) $z = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

   k) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

   l) $z = \frac{x\sin(y)}{\cos(x^2+y^2)}$

2. Considere a função $z = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. Calcule

   a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$

   b) $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

4. Seja $g(x,y) = \phi(\frac{x}{y})$ a função do exercício anterior. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$$

   para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$.

5. Considere a função dada por $z = x\sin\frac{x}{y}$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = z$$

6. Determina uma função $f(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2+1} \end{cases} .$$

7. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

8. Calcule as derivadas parciais

   a) $f(x,y,z) = xe^{x-y-z}$
   b) $x^2 \arcsin\left(\frac{y}{z}\right)$
   c) $w = \frac{xyz}{x+y+z}$
   d) $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$
   e) $s = f(x,y,z,w)$ dada por $s = xy\ln(x^2+y^2+z^2+w^2)$

9. Seja $f(x,y,z) = xx^2+y^2+z^2$. Verifique que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -f$$

Diferenciabilidade

1. Prove que as funções dadas são diferenciáveis

   a) $f(x,y) = xy$
   b) $f(x,y) = x+y$
   c) $f(x,y) = x^2y^2$
   d) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$
   e) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$
   f) $f(x,y) = x^2+y^2$

2. f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

   a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.
   b) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.
   c) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

3. Verifique que a função dada é diferenciável

   a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$
   b) $f(x,y) = x^4+y^3$
   c) $f(x,y) = x^2y$
   d) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$
   e) $f(x,y) = x\cos x^2+y^2$
   f) $f(x,y) = \arctan(xy)$

4. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se} \quad x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

Plano Tangente e Reta Normal

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

   a) $f(x,y) = 2x^2y$ em $(1, 1, f(1,1))$.
   b) $f(x,y)) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0,1))$.
   c) $f(x,y) = 3x^3 - xy$ em $(1, -1, f(1,-1))$.
   d) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2, 2, f(2,2))$.
   e) $f(x,y) = \arctan(x - 2y)$ em $\left(2, \frac{1}{2}, f\left(2, \frac{1}{2}\right)\right)$.
   f) $f(x,y) = xy$ em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

2. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

3. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

4. $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1, 1, 3)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

5. $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.
   b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

Gradiente

1. Calcule $\nabla f(x,y)$ sendo $f(x,y) =$

   a) x^2y
   b) $e^{x^2-y^2}$
   c) $\frac{x}{y}$
   d) $\arctan\frac{x}{y}$

2. Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule $\nabla f(x,y,z)$ sendo $f(x,y,z) =$

   a) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   b) $x^2+y^2+z^2$
   c) $(x^2+y^2+1)\,z^2$
   d) $z\arctan\frac{x}{y}$