TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 6

1. Usando os axiomas de ZF, mostre que A é conjunto:
(a) $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;
(b) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.
(c) $A = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

2. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que são conjuntos:
(a) $A \setminus B$;
(b) o par ordenado (A, B);
(c) $A \triangle B$;
(d) $A \cap B \cap C$;
(e) $A \cup B \cup C$;
(f) o conjunto dos subconjuntos unitários de A.

3. Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que existe um único conjunto C tal que $x \in C$ se e somente se $x \in A$ e $x \notin B$ ou $x \in B$ e $x \notin A$.

4. Dados A, B e C conjuntos, mostre que existe um conjunto P tal que $x \in P$ se e somente se $x = A$ ou $x = B$ ou $x = C$.

5. Mostre que $\bigcap S$ existe para todo conjunto $S \neq \emptyset$. Onde que a hipótese $S \neq \emptyset$ é usada na demonstração?

6. Substitua o Axioma do Vazio (ou Axioma de Existência) pelo seguinte axioma mais fraco: "Existe algum conjunto". Mostre o Axioma do Vazio usando este axioma e o Esquema de Axiomas da Separação.

7. Seja $A \neq \emptyset$; prove que não existe nenhum conjunto S contendo todos os conjuntos equipotentes a A. (Sugestão: mostre que neste caso $\bigcup S$ seria o "conjunto de todos os conjuntos".)

8. Mostre que $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ é falso para qualquer conjunto X. Em particular, $\mathcal{P}(X) \neq X$, para qualquer conjunto X. Isso mostra novamente que "o conjunto de todos os conjuntos" não existe.

9. Seja A um conjunto. Mostre que o "complemento" de A não existe (o "complemento" de A é o conjunto de todos os x tais que $x \notin A$).

10. Seja A um conjunto não vazio. Mostre que não existe algum conjunto H tal que todos os conjuntos que tem intersecção não vazia com A pertencem a H, i.e., $\forall x(x \cap A \neq \emptyset \rightarrow x \in H)$. (Sugestão : Procure obter, a partir de H, algum conjunto que tenha todos os conjuntos por elementos.)