MULTIPLICADORES DE LAGRANGE 🎯

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

Multiplicadores de Lagrange

Objetivo do Tópico

- ✓ Abordar problemas de otimização restrita e transformá-los em problemas de otimização não restrita de uma função;

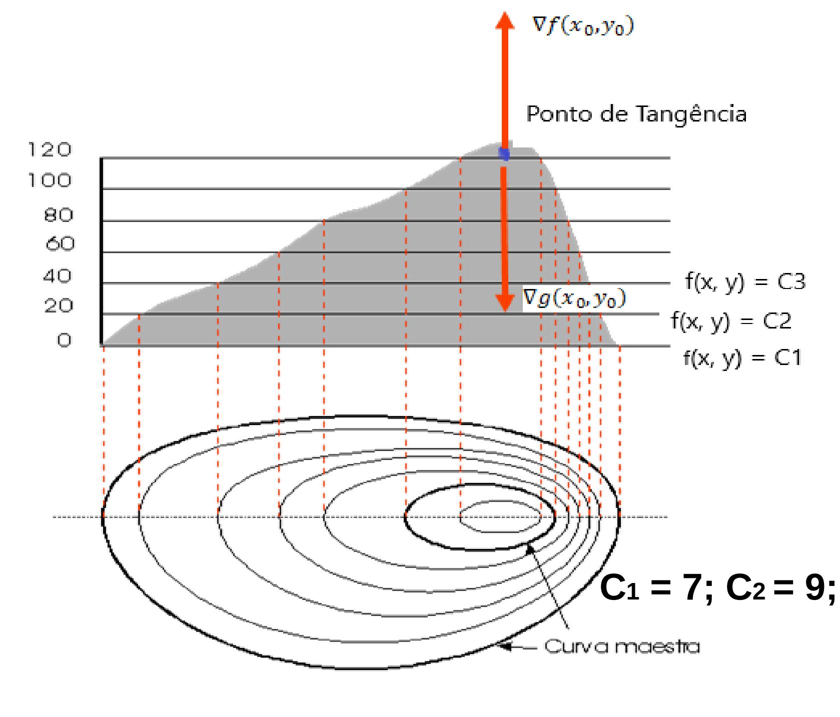
- ✓ Resolver a equação de restrição para uma das variáveis em termos das outras e substituir o resultado na função. Esse procedimento possibilita uma nova função que incorpora a restrição, podendo ser maximizada ou minimizada;

- ✓ Encontrar candidatos de máximo e mínimo de uma função f restrita a uma condição $g(x, y) = C$.

- ✓ $B = \{(x, y) \in D_f \,/\, g(x, y) = C\}$

Multiplicadores de Lagrange

A Figura 1 apresenta a curva de nível com outras curvas de nível da função f.



$C_1 = 7$; $C_2 = 9$; $C_3 = 12$

Figura 1 – Curva de nível

Então os candidatos a máximo e mínimo de f restritos a uma condição dessa é que o gradiente no ponto que procuramos ∇g e ∇f poderá ter outro sentido, no entanto, terá a mesma direção. Então o ponto (x_0, y_0) será candidato a máximo e mínimo se

$$\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0)$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Multiplicadores de Lagrange

UMA RESTRIÇÃO

Método dos Multiplicadores de Lagrange Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Multiplicadores de Lagrange

Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ nos termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficarão

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k \qquad \textbf{(a)}$$

Isso é um sistema de quatro equações a quatro incógnitas x, y, z e λ. Mas não é necessário calcular de modo explícito valores para λ.

Multiplicadores de Lagrange

DUAS RESTRIÇÕES

Suponha que se quer determinar os valores de máximo e mínimo de f(x, y, z) sujeita a duas restrições da forma g(x, y, z) = k e h(x, y, z) = c. Geometricamente, isso significa a procura pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrito a pertencer à curva C obtida pela intersecção das superfícies de nível g(x, y, z) = k e h(x, y, z) = c, conforme apresentado na Figura 2.

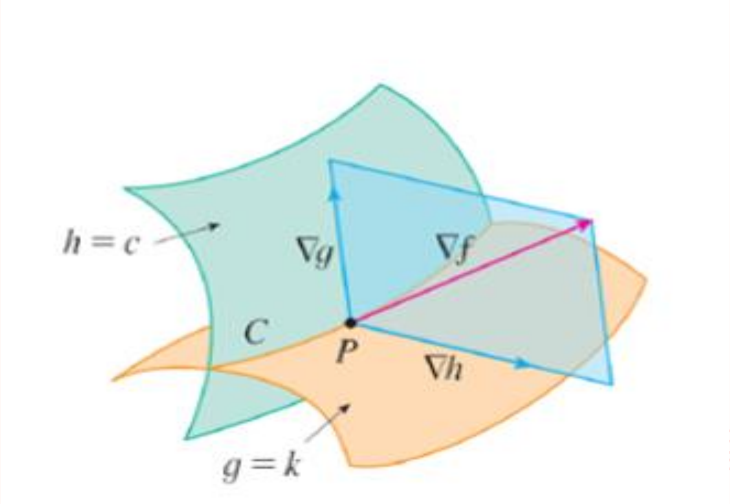


Figura 2

Multiplicadores de Lagrange

Portanto, existem números λ e μ denominados de Multiplicadores de Lagrange, tais que:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

Nesse caso o método de Lagrange é procurar por valores extremos ao resolver cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z, λ e μ.

Multiplicadores de Lagrange

Essas equações são obtidas em termos de seus componentes e ao utilizar as equações de restrição:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

Multiplicadores de Lagrange

Exercícios sobre Multiplicadores de Lagrange

1- Determine o ponto da reta x + 2y = 1, cujo produto das coordenadas seja máximo.

2- Encontrar os valores de máximo e mínimo de f(x, y) = $(x - y)^2$ **em B =** $\{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$**.**

3- Determine o valor de máximo da função f(x,y,z) = x + 2y + 3z na curva da intersecção do plano x – y + z =1 com o cilindro x^2**+**y^2**=1.**