Integração Numérica

Fórmula dos Trapézios

Nelson Kuhl

IME/USP

26 de novembro de 2020

Introdução

1. Muitas funções têm primitivas que não podem ser representadas por funções elementares (por exemplo, $f(x) = e^{-x^2}$);

Introdução

1. Muitas funções têm primitivas que não podem ser representadas por funções elementares (por exemplo, $f(x) = e^{-x^2}$);
2. há funções cujas primitivas são difíceis de se obter;

Introdução

1. Muitas funções têm primitivas que não podem ser representadas por funções elementares (por exemplo, $f(x) = e^{-x^2}$);
2. há funções cujas primitivas são difíceis de se obter;
3. há situações nas quais a função a ser integrada resulta de um programa;

Introdução

1. Muitas funções têm primitivas que não podem ser representadas por funções elementares (por exemplo, $f(x) = e^{-x^2}$);
2. há funções cujas primitivas são difíceis de se obter;
3. há situações nas quais a função a ser integrada resulta de um programa;
4. nos casos acima, são necessários métodos numéricos para o cálculo dos valores das integrais;

Introdução

1. Muitas funções têm primitivas que não podem ser representadas por funções elementares (por exemplo, $f(x) = e^{-x^2}$);
2. há funções cujas primitivas são difíceis de se obter;
3. há situações nas quais a função a ser integrada resulta de um programa;
4. nos casos acima, são necessários métodos numéricos para o cálculo dos valores das integrais;
5. integrais podem fazer parte de outros métodos numéricos, sendo necessário o uso de fórmulas de integração numérica;

Introdução

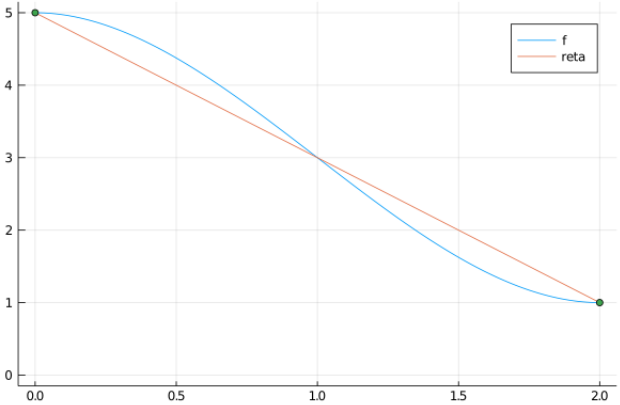
1. Muitas funções têm primitivas que não podem ser representadas por funções elementares (por exemplo, $f(x) = e^{-x^2}$);
2. há funções cujas primitivas são difíceis de se obter;
3. há situações nas quais a função a ser integrada resulta de um programa;
4. nos casos acima, são necessários métodos numéricos para o cálculo dos valores das integrais;
5. integrais podem fazer parte de outros métodos numéricos, sendo necessário o uso de fórmulas de integração numérica;
6. iremos ilustrar como a interpolação polinomial pode ser usada para se deduzir fórmulas de integração numérica envolvendo os valores de uma função em um conjunto finito de pontos.

A fórmula do trapézio

Uma das fórmulas mais simples para se aproximar

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

consiste em usar a integral da reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



A fórmula do trapézio

Esta reta é o polinômio interpolador p_1 da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline f(x) & f(a) & f(b) \end{array},$$

A fórmula do trapézio

Esta reta é o polinômio interpolador p_1 da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline f(x) & f(a) & f(b) \end{array},$$

cuja expressão na forma de Lagrange é

$$p_1(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

A fórmula do trapézio

Esta reta é o polinômio interpolador p_1 da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline f(x) & f(a) & f(b) \end{array},$$

cuja expressão na forma de Lagrange é

$$p_1(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

A fórmula do trapézio T para aproximar I é então igual a

$$T = \int_a^b p_1(x)\, dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \tag{2}$$

A fórmula do trapézio

Esta reta é o polinômio interpolador p_1 da tabela

$$\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline f(x) & f(a) & f(b) \end{array},$$

cuja expressão na forma de Lagrange é

$$p_1(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

A fórmula do trapézio T para aproximar I é então igual a

$$T = \int_a^b p_1(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \tag{2}$$

A origem do nome deriva do fato de que a expressão acima é a fórmula da área do trapézio de altura $b-a$ e bases $f(a)$ e $f(b)$ (quando estes valores são positivos).

Repetições

Evidentemente, a fórmula (2) é uma aproximação grosseira para a integral, pois ela usa os valores de f somente nos pontos a e b. Em analogia à definição da integral de Riemann, podemos melhorar a aproximação subdividindo-se o intervalo $[a, b]$ e usando-se a fórmula em cada subintervalo. Considere a partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ em n subintervalos de comprimentos iguais h:

$$h = \frac{b-a}{n}; \quad x_i = a + i \cdot h,\ 0 \leq i \leq n.$$

Como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

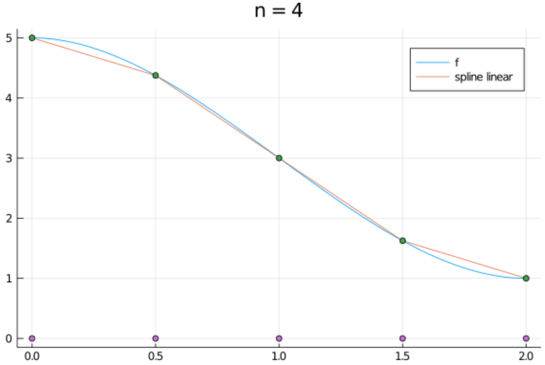
em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ aproximamos a integral pela fórmula do trapézio

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \ \ (\text{pois } x_i - x_{i-1} = h),$$

Repetições

levando-nos, após agruparmos os termos repetidos, à fórmula dos trapézios com n repetições, ou **fórmula dos n-trapézios**:

$$T_n = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right]. \qquad (3)$$



Exemplo

Aproxime

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

usando 4-trapézios.

Exemplo

Aproxime

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

usando 4-trapézios.

Solução

Temos $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $n = 4$ e $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$. Os pontos da partição são

Exemplo

Aproxime

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

usando 4-trapézios.

Solução

Temos $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $n = 4$ e $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$. Os pontos da partição são

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1.25,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 1.75,\ \text{e } x_4 = 2.$$

Exemplo

Aproxime

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

usando 4-trapézios.

Solução

Temos $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $n = 4$ e $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$. Os pontos da partição são

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1.25,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 1.75,\ \text{e } x_4 = 2.$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} T_4 &= 0.25 \cdot \left[\frac{1}{2} f(1) + f(1.25) + f(1.5) + f(1.75) + \frac{1}{2} f(2)\right] \\ &= 0.25 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right] \approx 0.69702. \end{aligned}$$

Estimativa de erro

- Se a função f for Riemann-integrável no intervalo $[a, b]$, então as aproximações por n-trapézios convergem para a integral de f no intervalo;

Estimativa de erro

- Se a função f for Riemann-integrável no intervalo $[a, b]$, então as aproximações por n-trapézios convergem para a integral de f no intervalo;
- se f for suficientemente regular, podemos determinar também qual é a dependência do erro com h;

Estimativa de erro

- Se a função f for Riemann-integrável no intervalo $[a, b]$, então as aproximações por n-trapézios convergem para a integral de f no intervalo;
- se f for suficientemente regular, podemos determinar também qual é a dependência do erro com h;
- como o erro é a soma dos erros das aproximações em cada subintervalo, estimaremos primeiro o erro E_{T_1} para 1-trapézio;

Estimativa de erro

- Se a função f for Riemann-integrável no intervalo $[a, b]$, então as aproximações por n-trapézios convergem para a integral de f no intervalo;
- se f for suficientemente regular, podemos determinar também qual é a dependência do erro com h;
- como o erro é a soma dos erros das aproximações em cada subintervalo, estimaremos primeiro o erro E_{T_1} para 1-trapézio;
- esta estimativa será baseada na fórmula do erro para a interpolação polinomial.

Estimativa de erro

De (1) e (2) temos

$$E_{T_1} = I - T = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\, dx.$$

Estimativa de erro

De (1) e (2) temos

$$E_{T_1} = I - T = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\, dx.$$

Se $f \in C^2([a, b])$, da fórmula do erro para a interpolação polinomial sabemos que, para cada $x \in [a, b]$, existe $t_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(t_x)}{2}(x - a)(x - b).$$

Estimativa de erro

De (1) e (2) temos

$$E_{T_1} = I - T = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\, dx.$$

Se $f \in C^2([a, b])$, da fórmula do erro para a interpolação polinomial sabemos que, para cada $x \in [a, b]$, existe $t_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(t_x)}{2}(x - a)(x - b).$$

Sejam

$$l_2 = \min_{x \in [a,b]} f''(x), \quad L_2 = \max_{x \in [a,b]} f''(x),$$

que estão bem definidos pois f'' é contínua em $[a, b]$. Então,

Estimativa de erro

De (1) e (2) temos

$$E_{T_1} = I - T = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\, dx.$$

Se $f \in C^2([a,b])$, da fórmula do erro para a interpolação polinomial sabemos que, para cada $x \in [a,b]$, existe $t_x \in [a,b]$ tal que

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(t_x)}{2}(x-a)(x-b).$$

Sejam

$$l_2 = \min_{x\in[a,b]} f''(x), \quad L_2 = \max_{x\in[a,b]} f''(x),$$

que estão bem definidos pois f'' é contínua em $[a,b]$. Então,

$$\frac{l_2}{2}(x-a)(b-x) \leq -[f(x) - p_1(x)] \leq \frac{L_2}{2}(x-a)(b-x), \ \forall x \in [a,b],$$

Estimativa de erro

pois $(x-a)(b-x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Integrando-se a última expressão de a até b obtemos

$$\frac{l_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx \leq -E_{T_1} \leq \frac{L_2}{2} \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx,$$

de onde obtemos

$$l_2 \frac{(b-a)^3}{12} \leq -E_{T_1} \leq L_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Como a imagem do intervalo $[a, b]$ por f'' é o intervalo $[l_2, L_2]$, concluimos que existe $t \in [a, b]$ tal que

$$E_{T_1} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(t). \tag{4}$$

Estimativa de erro

O erro E_{T_n} para n-trapézios é soma dos erros de 1-trapézio em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$. De (4), existem $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que cada um desses erros é igual a -$\frac{h^3}{12} f^{''}(t_i)$ e portanto

$$E_{T_n} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f^{''}(t_i).$$

Estimativa de erro

O erro E_{T_n} para n-trapézios é soma dos erros de 1-trapézio em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$. De (4), existem $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que cada um desses erros é igual a -$\frac{h^3}{12} f^{''}(t_i)$ e portanto

$$E_{T_n} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f^{''}(t_i).$$

Como $f^{''}$ é contínua, existe $t \in [a, b]$ tal que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^{''}(t_i) = f^{''}(t)$, e então obtemos

$$E_{T_n} = -\frac{h^3 n}{12} f^{''}(t).$$

Estimativa de erro

O erro E_{T_n} para n-trapézios é soma dos erros de 1-trapézio em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$. De (4), existem $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que cada um desses erros é igual a -$\frac{h^3}{12} f''(t_i)$ e portanto

$$E_{T_n} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(t_i).$$

Como f'' é contínua, existe $t \in [a, b]$ tal que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(t_i) = f''(t)$, e então obtemos

$$E_{T_n} = -\frac{h^3 n}{12} f''(t).$$

A expressão acima não é adequada pois n e h estão relacionados por $h = \frac{b-a}{n}$. Usando este fato podemos finalmente enunciar:

Estimativa de erro

Teorema 1

Suponha que $f \in C^2([a,b])$. Então, o erro entre a integral de f em $[a,b]$ e a sua aproximação por n-trapézios é igual a

$$E_{T_n} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(t) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(t) \tag{5}$$

para algum $t \in [a,b]$.

Estimativa de erro

Teorema 1

Suponha que $f \in C^2([a, b])$. Então, o erro entre a integral de f em $[a, b]$ e a sua aproximação por n-trapézios é igual a

$$E_{T_n} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(t) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(t) \tag{5}$$

para algum $t \in [a, b]$.

Se $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$, obtemos também a estimativa

$$|E_{T_n}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \tag{6}$$

Estimativa de erro

Teorema 1

Suponha que $f \in C^2([a,b])$. Então, o erro entre a integral de f em $[a,b]$ e a sua aproximação por n-trapézios é igual a

$$E_{T_n} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(t) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(t) \tag{5}$$

para algum $t \in [a,b]$.

Se $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, obtemos também a estimativa

$$|E_{T_n}| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \tag{6}$$

- Observe que o erro tende a zero proporcionalmente a h^2 (ou $\frac{1}{n^2}$).

Exemplo

Usando a fórmula (6) estime o erro da aproximação de $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ por 4-trapézios e compare com o erro exato. Estime também o número mínimo de repetições para se garantir um erro menor do que 10^{-6}.

Exemplo

Usando a fórmula (6) estime o erro da aproximação de $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ por 4-trapézios e compare com o erro exato. Estime também o número mínimo de repetições para se garantir um erro menor do que 10^{-6}.

Solução

Como $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e portanto $M_2 = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = 2$.
Logo,

Exemplo

Usando a fórmula (6) estime o erro da aproximação de $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ por 4-trapézios e compare com o erro exato. Estime também o número mínimo de repetições para se garantir um erro menor do que 10^{-6}.

Solução

Como $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e portanto $M_2 = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = 2$. Logo,

$$|E_{T_n}| \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \Longrightarrow |E_{T_4}| \leq 0.010417.$$

Anteriormente obtivemos $T_4 = 0.69702$ o que nos dá $|\log 2 - T_4| \approx 0.0039$ mostrando que a estimativa é cerca de 2.7 vêzes maior. Para o número mínimo de repetições, basta obter o menor n tal que

Exemplo

Usando a fórmula (6) estime o erro da aproximação de $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ por 4-trapézios e compare com o erro exato. Estime também o número mínimo de repetições para se garantir um erro menor do que 10^{-6}.

Solução

Como $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e portanto $M_2 = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = 2$. Logo,

$$|E_{T_n}| \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \Longrightarrow |E_{T_4}| \leq 0.010417.$$

Anteriormente obtivemos $T_4 = 0.69702$ o que nos dá $|\log 2 - T_4| \approx 0.0039$ mostrando que a estimativa é cerca de 2.7 vêzes maior. Para o número mínimo de repetições, basta obter o menor n tal que

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-6} \Longrightarrow n > 408.24\cdots \Longrightarrow n \geq 409 \text{ (ou } h \leq 0.00244\ldots)$$