

Conjuntos não-enumeráveis

Def: Dizemos que um conjunto X é não-enumerável se $|\mathbb{N}| < |X|$

A primeira pergunta a fazer é:

Pergunta: Existem conjuntos não enumeráveis?

Resp: Sim, se deve a Cantor, resultado importante para o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos.

Se vimos que união de conjuntos enumeráveis é enumerável, o que nos diz que usando a união não iremos conseguir "construir" um conj. não enumerável.

Mas sabemos que X finito $\rightarrow |P(X)| = 2^{|X|}$, ou seja, fazendo $P(X)$ o tamanho do conjunto pode aumentar muito mais.

A pergunta natural então é: $P(\mathbb{N})$ é enumerável?

O próximo teorema (Teorema de Cantor) nos dirá que

sim, $P(\mathbb{N})$ é não enumerável.

Vamos mostrá-lo para um conjunto qualquer X (que a "mesma demonstração" para $\mathbb{N}$):

Teorema de Cantor: $|X| < |\mathcal{P}(X)|$, para um conjunto qualquer X .

Dem:

Primeiro note que $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. É só considerar a função $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que é injetora.
 $x \rightarrow \{x\}$

Resta então mostrar que não vale $|X| = |\mathcal{P}(X)|$, ou seja, que $\nexists f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ bijetora.

Suponha por absurdo que $\exists f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ bijetora. Defina $A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \subset X$ e $\therefore A \in \mathcal{P}(X)$

Com f surjetora,

$A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow \exists y \in X$ tal que $f(y) = A$.
 $\rightarrow$ ideia: por cada x , x é que "testemunha" que $f(x) \neq A$
i.e. que $x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x)$

Mas daí:

$y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A$, absurdo. //

Corolário: $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ e $\therefore \mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável.

Obs: Note que como consequência do Teorema de Cantor temos "vários infinitos" pois.

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots$$

. Apenas uma observação vaga e informal sobre os "vários infinitos".

Obs: Para "lidar" com os vários infinitos, na T. do Conj, define-se:

- n.º cardinais: - assim como tem $|X| = n$ para X finito, quer ter algum "objeto" (conjunto) K tal que podemos escrever $|X| = K$, mesmo quando X infinito. Esses K 's vão ser os "cardinais".
- intuitivamente: eles servem os "representantes" de "classe" $[A] = \{B : |B| = |A|\}$
- representam "tamanhos" infinito
- para ter " $\forall X \exists K$ t.q. $|X| = K$ " precise do Axioma de Escolha (que o conj seja bem ordenado)

- n.º ordinais: - nos permite continuar a indução/recursão para além de IV , nos permitindo mostrar teoremas ou construir objetos que não são enumeráveis
- nos permite continuar a "contagem" para além de IV :
$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & IV & \omega+1 & \omega+2 & \dots & \omega+\omega & \dots & \omega_1 & \dots \\ & & & & \omega & \omega & \omega & & & & \downarrow & \\ & & & & & & & & & & 1^\circ & \text{não enum.} \end{array}$$
- boa ordem é o conceito central usado.

- Sabendo que $P(IV)$ é não enumerável (i.e., $|IV| < |P(IV)|$), é natural perguntar:

Problema: $\exists A$ ^(conjunto) tal que $|IV| < |A| < |P(IV)|$?

Em um certo sentido, não é possível de responder
nem sim nem não:

• Hipótese do Contínuo ^(CH): $\nexists A$ t.q. $|IV| < |A| < |\mathcal{P}(IV)|$

• Formulado por Cantor

• É independente de ZFC;

• Gödel: "consistente" que sim (30%)

• Cohen: "consistente" que não (60%)

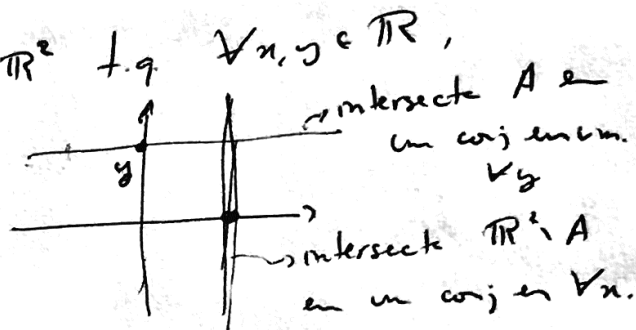
se adicionar aos axiomas de ZFC não leva a contradição (nem CH nem $\neg CH$)

• Curiosidade: CH é equivalente a: $\exists A \subset \mathbb{R}^2$ t.q. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\{a \in \mathbb{R} : (a, y) \in A\}| \leq \omega \text{ e}$$

$$|\{b \in \mathbb{R} : (x, b) \in A\}| \leq \omega$$

(Mostrado por Sierpinski em 1915)



• Já sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. E $\mathbb{R}$?

É natural querer saber o tamanho de $\mathbb{R}$, que muitas vezes é chamado de (cardinalidade do) contínuo

• A primeira coisa a estabelecer é:

Teor: $\mathbb{R}$ é não enumerável.

• Tem mais de uma forma possível de mostrar esse teorema.

Ele segue também como consequência de mostrar que $\mathbb{R}$

é equipotente a outro conjunto que sabemos que não é enumerável.

Vou apenas dar algumas ideias

- Demonstração de Cantor de que $\mathbb{R}$ é não enumerável: (talvez a forma mais usual de mostrar).

Suponha $\mathbb{R}$ enumerável, ou seja, ^{podemos escrever} $\mathbb{R} = \{r_0, r_1, r_2, \dots\} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Olhando a representação decimal dos n.º reais (e supondo que é única), suponha que $r_n = a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots$

"Construa" agora um "novo" número real, usando um argumento de diagonalização. Isto pode ser feito por exemplo definindo

$$\begin{cases} b_n = 1 & \text{se } a_n^{(n)} = 0 \\ b_n = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ pego $b_n \neq a_n^{(n)}$.

Dai se $r = b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$, r é tal que $r \neq r_n \forall n \in \mathbb{N}$, absurdo.

Obs: O argumento central (a "diagonalização") é o mesmo feito por Cantor no Teorema de Cantor, que diz que $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Seja o conjunto A definido difere de cada $f(x)$ "em x ", ou seja, como $x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x)$, x é um elemento que garante que $A \neq f(x) \forall x \in X$.

- Outra forma de mostrar que $\mathbb{R}$ é não enumerável:

Podemos querer saber mais sobre o tamanho de $\mathbb{R}$, por exemplo, se $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Se sim, pelo Teorema de Cantor, segue que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Notação: $A_2 = A_{\{0,1\}} = \{f; f: A \rightarrow \overset{2}{\underset{1}{\{0,1\}}} \text{ e função}\}$.
(também é usado a notação 2^A e $\{0,1\}^A$)

Vamos dar uma ideia de como mostrar que $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}_2|$:

- no reais $\leadsto$ representação decimal

Um caso particular: $0,11010\dots \rightarrow$ olha só sequência de 0's e 1's.

(note que estamos pegando só "alguns" n's reais).

Ou seja, dada $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$, temos uma maneira natural (e única) de definir um n° real associado a f .
(pode definir $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{10^i}$).

Logo para saber $|\mathbb{R}|$ é natural olhar também o tamanho de $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N}^{\{0,1\}}$.

Pergunta natural: Qual a relação entre $|\mathcal{P}(A)|$ e $|A_2|$? São iguais?

Def: Seja A um conjunto. Para $S \subseteq A$, a função característica de S é a função

$$\chi_S: A \rightarrow \{0,1\} = 2 \text{ dada por}$$
$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ 1 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

• Com isso podemos mostrar:

Prop: Para um conjunto qualquer A , $|P(A)| = |^A 2|$.

Dem: Basta verificar que a função $f: P(A) \rightarrow A_2$ é bijetora
 $S \rightarrow X_S$

(exercício de lista 5)

• Voltando a "cardinalidade de $\mathbb{R}$ " temos:

Teorema: $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}_2|$ ($= |\mathbb{N}_{\mathbb{N}}|$) (exercício lista 5)

"Dem":

• $|\mathbb{R}| \leq |P(\mathbb{Q})| = |P(\mathbb{N})|$ (use construção de $\mathbb{R}$ por cortes de Dedekind.)

• $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}_2| \leq |\mathbb{R}|$ pois $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ e use ex de lista 5.

$|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}_2| \leq |\mathbb{R}|$ usa representação decimal e obs feita antes.

Dai o resultado segue do Teorema de Bernstein-Cantor.

• Obs: Existem outras formas de mostrar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.