SISTEMAS LINEAR EM $\mathbb{R}^3$ COM UM ÚNICO AUTOVALOR COM MULTIPLICIDADE GEOMÉTRICA 1

Consideremos agora o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Vamos supor que a matriz $\mathbf{A}$ possua um único autovalor λ com multiplicidade geométrica 1. Do teorema ce Cayley-Hamilton, segue que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3 \equiv 0$. Então, se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$, teremos $(\mathbf{A} - \lambda)^3\mathbf{v} = 0$.

Façamos $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v}_3$.

Então teremos: $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$, $\mathbf{A}v_2 = \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{A}v_3 = \lambda\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2$.

Indicando, por $\mathbf{B}$ a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, teremos então

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right] = \lambda\left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right] + [0, v_1, v_2]$$

ou seja:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \lambda\mathbf{B} + [0, v_1, v_2]$$

Definimos novas variáveis u_1, u_2 e u_3 por

Date: November 27, 2020.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Então, teremos, após alguns cálculos

$$\begin{bmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \\ \dot{u_3} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Agora

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\left(\lambda\mathbf{B} + [0, v_1, v_2]\right) = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{B}^{-1}\left[0, v_1, v_2\right].$$

Agora $\mathbf{B}^{-1}\left[0, v_1, v_2\right] = \mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{X} = \left[0, v_1, v_2\right]$, e a (única) matriz solução $\mathbf{X}$ dessa equação matricial é

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, nas novas variáveis u_1 e u_2 e u_3 , o sistema se torna

$$\begin{aligned} \dot{u_1} &= \lambda u_1 + u_2 \\ \dot{u_2} &= \lambda u_2 + u_3 \\ \dot{u_3} &= \lambda u_3 \end{aligned}$$

Da terceira equação, obtemos

$$u_3(t) = C_3 e^{\lambda t}$$

e, substituindo na segunda equação:
$\dot{u_2} - \lambda u_2 = C_3 e^{\lambda t}$ e, portanto,

$$u_2 = C_3 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}.$$

Finalmente, substituindo na primeira equação, obtemos:
$\dot{u}_1 \lambda u_1 = C_3 t e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}$. e, portanto,

$$u_1 = C_3 \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + C_1 e^{\lambda t}.$$

Na forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t}.$$

Nas variáveis originais x_1, x_2 e x_3, teremos então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & tv_1 + v_2 & \frac{1}{2}t^2 v_1 + t v_2 + v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \\ &= C_1 v_1 e^{\lambda t} + C_2 (t v_1 + v_2) e^{\lambda t} + C_3 (\frac{1}{2} t^2 v_1 + t v_2 + v_3) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$